Mémoire de master

# Quantification d'énergie et stabilité de l'indice de Morse pour certains problèmes invariants conformes

Mario Gauvrit
M2 Mathématiques Fondamentales, Sorbonne Université

encadré par Paul Laurain, IMJ-PRG

mai - juillet 2023

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude envers les personnes qui ont joué un rôle essentiel dans la réalisation de ce mémoire de master en mathématiques.

Je souhaite remercier chaleureusement Paul Laurain, mon directeur de mémoire, pour son précieux encadrement, ses conseils avisés, sa disponibilité et sa patience tout au long de ce projet de recherche. Un grand merci à Tristan Rivière pour son invitation à l'ETH Zürich et pour avoir su partager, malgré la brièveté de ce séjour, des enseignements et conseils précieux, qui ont grandement enrichi ce travail de recherche. Merci également à eux deux d'avoir accepté de diriger ma thèse, j'attends avec impatience de pouvoir continuer de travailler avec eux.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance les doctorants de l'ETH pour leur accueil chaleureux.

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ma famille et mes amis pour leur soutien constant et leur compréhension tout au long de mon parcours.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce à votre soutien et à votre contribution. Merci à chacun d'entre vous.

# Sommaire


**Introduction** **1**

**I Points critiques de lagrangiens invariants conformes** **2**

I.1 Rappels et notations . . . . . 4

I.2 Démonstration de la quantification $L^{2,1}$ . . . . . 4

I.3 Estimées ponctuelles dans les cous . . . . . 6

I.4 Semi-continuité de l'indice . . . . . 12

**II Connexions de Yang-Mills** **19**

II.1 Rappel des grands théorèmes . . . . . 20

II.2 Contrôles $L^{2,\infty}$ et $L^{2,1}$ de la courbure . . . . . 20

**Annexes** **i**

A.1 Résultats de théorie spectrale . . . . . iv

A.2 Inégalité de Gaffney . . . . . viii

**Bibliographie** **x**

# Introduction

L'invariance conforme est une propriété fondamentale pour de nombreux problèmes issus de la physique et de la géométrie. Au cours des dernières décennies, elle est devenue également un élément important dans de nombreuses questions en analyse non linéaire. Le cadre de ce mémoire est l'étude des lagrangiens elliptiques conformément invariants. D'un point de vue analytique, ces derniers ont en commun le fait que leurs équations d'Euler-Lagrange soient critiques par rapport à l'espace fonctionnel naturellement défini par le lagrangien, et par conséquent, les solutions à ces équations sont sujettes à des phénomènes de concentration-compacité. Des questions telles que la régularité des solutions ou les pertes d'énergie pour des suites de solutions ne peuvent pas être résolues par des arguments généraux robustes, mais nécessitent plutôt une étude minutieuse de l'interaction entre la partie d'ordre le plus élevé de l'EDP et sa non-linéarité.

Le but premier de ce mémoire est l'étude de la fonctionnelle de Yang-Mills : si $G$ est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{SO}(n)$ et $(\mathcal{M}, h)$ est une variété riemannienne, on note pour toute 1-forme $A$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de $G$,

$$\mathrm{YM}(A) = \int_{\mathcal{M}} |\mathrm{d}A + A \wedge A|_h^2 \mathrm{vol}_h,$$

qui est conformément invariant si $\mathcal{M}$ est de dimension 4. Ses points critiques sont appelés *connexions de Yang-Mills*. Un intérêt particulier est porté à la stabilité de l'indice de Morse pour des suites de connexions Yang-Mills, motivé par la construction des connexions de Yang-Mills en dimension 4 par des opérations de min-max. Un tel résultat à été établi récemment par Da Lio, Gianocca et Rivière pour les fonctionnelles conformément invariantes en dimension 2 : la semi-continuité inférieure est un résultat connu (voir [MR19], théorème 6.1), la semi-continuité supérieure fait l'objet de [DGR22] (théorème I.1), s'appuyant notamment sur les estimées dans les espaces de Lorentz démontrées par Laurain et Rivière [LR14].

La première partie de ce mémoire tâchera alors d'identifier et démontrer les points cruciaux de la démarche présentée dans [DGR22]. Dans une deuxième partie, les résultats préliminaires seront adaptés au cas de la fonctionnelle de Yang-Mills, prévoyant leur rôle déterminant dans la généralisation complète des résultats de la première partie.

# I Points critiques de lagrangiens invariants conformes

Nous nous intéresserons dans un premier temps au cas des surfaces à courbure moyenne prescrite (PMC). Si $(\Sigma, h)$ est une surface riemannienne, $\mathcal{N}$ est une variété immergée de $\mathbf{R}^N$ et $\alpha$ est une 2-forme sur $\mathcal{N}$, pour $u \in \mathrm{W}^{1,2}(\Sigma, \mathcal{N})$, on note

$$F(u) = \int_\Sigma \frac{1}{2}|\mathrm{d}u|_h^2 \mathrm{vol}_h + u^*\alpha. \tag{I.1}$$

Les points critiques de $F$ sont alors solutions de l'équation d'Euler-Lagrange

$$-\Delta_h u + H_u(\nabla u, \nabla u)_h \perp T_u\mathcal{N}, \tag{I.2}$$

où la non-linéarité $H$ ne dépend que de $h$ et de $\alpha$, et est quadratique en $\nabla u$. Les solutions de cette équation qui sont également conformes correspondent aux immersions de $\Sigma$ avec vecteur de courbure moyenne $H_u(e_1, e_2)_h$, où $(e_1, e_2)$ est une base orthonormée de $u_* T\mathcal{N}$ ce qui justifie le nom de *courbure moyenne prescrite*. Notons que dans cas où $\alpha = 0$, $F$ est l'énergie de Dirichlet et ses points critiques sont les applications harmoniques à valeurs dans $\mathcal{N}$. L'étude d'une telle fonctionnelle est fondamentale : en effet, il a été prouvé dans [Grü84] qu'en dimension deux, tout lagrangien elliptique et conformément invariant, vérifiant des « conditions naturelles », peut se mettre sous la forme (I.1). La méthode proposée par Rivière dans [Riv07] pour les étudier repose sur l'observation que les points critiques sont en fait solutions d'un système de la forme

$$-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u \tag{I.3}$$

où $\Omega$ est une fonction de $u$ et $\nabla u$ à valeurs dans $\mathfrak{so}(n) \otimes T\Sigma$ telle que

$$|\Omega| \leqslant C|\nabla u| \tag{I.4}$$

et

$$\Omega \cdot \nabla u \perp \nabla u. \tag{I.5}$$

Les outils mis en place dans [Riv07] ont permis d'étendre au cadre général l'utilisation de la théorie d'intégrabilité par compensation telle qu'elle intervenait dans le cas des immersions à courbure moyenne constante (CMC) et des applications harmoniques (voir par exemple [Hél02]). Ils permettent en particulier de déduire que les points critiques de (I.1) sont aussi réguliers que les données géométriques le permettent.

On démontre également, avec ce degré de généralité, un résultat de concentration compacité (voir [LR14], théorème 3) : si $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de points critiques de $F$ d'énergie bornée, i.e.

$$\sup_{k\in\mathbf{N}} \int_\Sigma |\mathrm{d}u_k|_h^2 \mathrm{vol}_h < +\infty,$$

alors à extraction près, il existe un point critique limite $u_\infty : \Sigma \to \mathcal{N}$ (appelée limite principale), un nombre fini de points de $\Sigma$, $p^1, \ldots, p^Q$ (points de concentration), pour tout $i \in [\![1, Q]\!]$, $\hat{u}_\infty^i$ une solution de (I.2) sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathcal{N}$ (appelée bulle), une suite de points $(x_k^i)_{k\in\mathbf{N}}$ de limite $p^i$ et une suite $(\delta_k^i)_{k\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs de limite nulle (taille caractéristique de la bulle) tels que :

—
$$u_k \to u_\infty \text{ dans } \mathcal{C}^1_{\mathrm{loc}}(\Sigma\backslash\{p^1, \ldots, p^Q\}), \tag{I.6}$$

— pour tout $i \in [\![1, Q]\!]$, si on définit en coordonnées normales pour $h$ au voisinage de $x_k^i$, $\hat{u}_k^i(y) := \hat{u}_\infty^i(x_k^i + \delta_k^i y)$,
$$\hat{u}_k^i \to \hat{u}_\infty^i \text{ dans } \mathcal{C}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2), \tag{I.7}$$

—
$$\nabla\left(u_k - u_\infty - \sum_{i=1}^Q \hat{u}_k^i\right) \to 0 \text{ dans } \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma). \tag{I.8}$$

Les propriétés (I.6) et (I.7) sont typiques des problèmes invariants conformes : on dit que la suite $(u_k)$ *bubble-tree*-converge vers $(u_\infty, \hat{u}_\infty^1, \ldots, \hat{u}_\infty^Q)$. La propriété (I.8) garantit l'absence de perte d'énergie dans les zones (souvent nommées *cous*) reliant les bulles à la limite principale : on parle de quantification $\mathrm{L}^2$ de l'énergie. De façon plus explicite, si on note par $A_{R,r}(x) = \mathrm{B}_R(x)\backslash\mathrm{B}_r(x)$,

$$\lim_{\eta\to 0} \liminf_{k\to+\infty} \int_{A_{\eta,\delta_k/\eta}(x_k^i)} |\nabla u_k|^2 \mathrm{d}x = 0. \tag{I.9}$$

Ce qui suit se base de façon cruciale sur un raffinement de ce résultat, la quantification $\mathrm{L}^{2,1}$ (voir [Gra14] pour une étude complète de cet espace), qui garantit que

$$\lim_{\eta\to 0} \liminf_{k\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left|\left\{x \in A_{\eta,\delta_k/\eta}(x_k^i), |\nabla u_k| > t\right\}\right|^{1/2} \mathrm{d}t = 0. \tag{I.10}$$

Il s'agira ensuite d'utiliser ce résultat pour en déduire des estimées ponctuelles de $\nabla u_k$ dans les cous et de les appliquer à l'étude de l'indice.

*Remarque.* Même s'il ne s'agit pas d'une norme (elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire), la quantité $2\int_0^{+\infty} |\{x \in X, |f| > t\}|^{1/2} \mathrm{d}t$ est équivalente à une norme sur $\mathrm{L}^{2,1}(X)$. Nous la noterons donc quand même $\|f\|_{\mathrm{L}^{2,1}(X)}$.

*Remarque.* Pour se convaincre que (I.10) est effectivement d'une amélioration du résultat précédent, on utilise la représentation suivante de la norme $\mathrm{L}^2$ :

$$\int_X |f|^2 \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} |\{x \in X, |f| > t\}|\, 2t\mathrm{d}t.$$

En la combinant à l'inégalité de Markov : $t^2\left|\{x\in X,|f|>t\}\right|\leqslant\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(X)}$, on obtient

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(X)}\leqslant\sup_{t>0}t\left|\{x\in X,|f|>t\}\right|^{1/2}\int_0^{+\infty}\left|\{x\in X,|f|>t\}\right|2\mathrm{d}t\leqslant\|f\|_{\mathrm{L}^2(X)}\|f\|_{\mathrm{L}^{2,1}(X)}$$

d'où

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(X)}\leqslant\|f\|_{\mathrm{L}^{2,1}(X)}.$$

## I.1 - Rappels et notations

Suivant la méthode de Rivière [Riv07], on peut réécrire l'équation (I.3) :

**Théorème I.1** ([Riv07], théorème I.4)**.** *Il existe* $\varepsilon,C>0$ *tels que pour tout* $\Omega\in\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1,\mathfrak{so}(n)\otimes\mathbf{R}^n)$*, si* $\||\Omega\||_{\mathrm{L}^2}<\varepsilon$ *alors il existe* $A\in\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_1,\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))\cap\mathrm{W}^{1,2}$ *et* $B\in\mathrm{W}^{1,2}(\mathrm{B}_1,\mathrm{M}_n(\mathbf{R}))$ *tels que*

$$\|\nabla A\|^2_{\mathrm{L}^2}+\|\nabla A^{-1}\|^2_{\mathrm{L}^2}+\|\mathrm{dist}(A,\mathrm{SO}(n))\|^2_{\mathrm{L}^\infty}+\|\mathrm{dist}(A^{-1},\mathrm{SO}(n))\|^2_{\mathrm{L}^\infty}\leqslant C\|\Omega\|^2_{\mathrm{L}^2},\tag{I.11}$$

$$\|\nabla B\|^2_{\mathrm{L}^2}\leqslant C\|\Omega\|^2_{\mathrm{L}^2}\tag{I.12}$$

*et*

$$\nabla A-A\Omega=\nabla^\perp B.\tag{I.13}$$

*En particulier,* $u$ *vérifie* $-\Delta u=\Omega\cdot\nabla u$ *si et seulement si*

$$\mathrm{div}\left(A\nabla u+B\nabla^\perp u\right)=0.\tag{I.14}$$

Pour appliquer le résultat précédent sur un anneau plutôt que sur une boule, on a besoin d'un théorème d'extension « à la Whitney » :

**Lemme I.2.** *Il existe* $C>0$ *tel que pour tous* $R,r>0$ *avec* $R>2r$*, il existe un opérateur linéaire* $E:\mathrm{W}^{1,2}(\mathrm{B}_\mathrm{R}\backslash\mathrm{B}_\mathrm{r})\to\mathrm{W}^{1,2}(\mathrm{B}_\mathrm{R})$*, tel que si* $u\in\mathrm{W}^{1,2}(\mathrm{B}_\mathrm{R}\backslash\mathrm{B}_\mathrm{r})$ *et* $\tilde u=Eu$*,* $\tilde u$ *coïncide avec* $u$ *sur* $\mathrm{B}_R\backslash\mathrm{B}_r$*,* $\mathrm{supp}(\nabla\tilde u)\subset\mathrm{B}_R\backslash\mathrm{B}_{r/2}$ *et*

$$\|\nabla\tilde u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_R)}\leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_R\backslash\mathrm{B}_r)}.$$

## I.2 - Démonstration de la quantification $\mathrm{L}^{2,1}$

La quantification $\mathrm{L}^{2,1}$ est obtenue à partir de la quantification $\mathrm{L}^2$ grâce à l'inégalité suivante :

**Proposition I.3.** *Il existe $\varepsilon_0, C > 0$, tels que, pour tous $R > r > 0$, si $u$ est solution de* (I.3) *sur* $\mathrm{B}_{2\mathrm{R}}$ *avec*

$$\int_{\mathrm{B}_{2R}\setminus \mathrm{B}_{r/2}} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon_0,$$

*alors*

$$\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_R\setminus \mathrm{B}_r)} \leqslant C \left( \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2R}\setminus \mathrm{B}_{r/2})} + R\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2R})} \right).$$

*Démonstration.* On a déjà $\left\| \frac{1}{\rho}\partial_\theta u \right\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_R\setminus \mathrm{B}_r)} \leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2R}\setminus \mathrm{B}_{r/2})}$ d'après le théorème 0.2 de [LR14] et théorème 2.5 de [LS16]. On introduit la différentielle de Hopf de $u$ :

$$\phi = |\partial_x u|^2 - |\partial_y u|^2 - 2\mathrm{i}\partial_x u \cdot \partial_y u = \partial_z u \cdot \partial_z u.$$

On a

$$|\partial_\rho u|^2 - \left|\frac{1}{\rho}\partial_\theta u\right|^2 = \frac{x^2-y^2}{\rho^2}(|\partial_x u|^2 - |\partial_y u|^2) + \frac{4xy}{\rho^2}\partial_x u \cdot \partial_y u$$

donc

$$\left| |\partial_\rho u|^2 - \left|\frac{1}{\rho}\partial_\theta u\right|^2 \right| \leqslant \sqrt{\left(\frac{x^2-y^2}{\rho^2}\right)^2 + \left(\frac{2xy}{\rho^2}\right)^2} \times |\phi| = |\phi|$$

On en déduit, puisque $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$,

$$|\partial_\rho u| \leqslant |\phi|^{1/2} + \left|\frac{1}{\rho}\partial_\theta u\right|.$$

Par ailleurs, d'après (I.5),

$$\partial_{\overline{z}}\phi = 2\partial_{\overline{z}}\partial_z u \cdot \partial_z u = 2\Delta u \cdot \partial_z u = 0.$$

Ainsi $\phi$ est holomorphe sur $\mathrm{B}_{2R}$. Or

$$|\phi| = (|\partial_x u|^2 - |\partial_y u|^2)^2 + (2\partial_x u \cdot \partial_y u)^2 = |\nabla u|^2 + 4((\partial_x u \cdot \partial_y u)^2 - |\partial_x u|^2|\partial_y u|^2) \leqslant |\nabla u|^2.$$

On en déduit, d'après la formule de la moyenne, l'existence de $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{B}_R$,

$$|\phi(x)| \leqslant C \int_{\mathrm{B}_R(x)} |\phi(z)|\mathrm{d}z \leqslant C \int_{\mathrm{B}_{2R}} |\nabla u(z)|^2 \mathrm{d}z.$$

soit encore

$$\|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_R)} \leqslant C\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2R})}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \|\partial_\rho u\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_R\setminus \mathrm{B}_r)} &\leqslant \||\phi|^{1/2}\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_R\setminus \mathrm{B}_r)} + \left\|\frac{1}{\rho}\partial_\theta u\right\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_R\setminus \mathrm{B}_r)} \\ &\leqslant C\left( \|1\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_R\setminus \mathrm{B}_r)}\||\phi|^{1/2}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_R\setminus \mathrm{B}_r)} + \left\|\frac{1}{\rho}\partial_\theta u\right\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_R\setminus \mathrm{B}_r)} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\left(|\mathrm{B}_R\backslash \mathrm{B}_r|^{1/2}\|\phi\|^{1/2}_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_R\backslash\mathrm{B}_r)}+\left\|\frac{1}{\rho}\partial_\theta u\right\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_R\backslash\mathrm{B}_r)}\right)\\
&\leqslant C\left(R\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2R})}+\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2R}\backslash\mathrm{B}_{r/2})}\right).
\end{aligned}
$$

□

Considérons à nouveaux une suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de points critiques comme en début de partie. Le résultat de quantification $\mathrm{L}^2$ (I.8) permet d'appliquer la proposition I.3 pour obtenir le théorème suivant, comme annoncé en (I.10) :

**Théorème I.4.** *Avec les notations précédentes, on a*

$$\lim_{\eta\to 0}\limsup_{k\to+\infty}\|\nabla u_k\|_{\mathrm{L}^{2,1}(A_{\eta,\delta_k/\eta}(x_k^i))}=0,$$

*soit encore*

$$\nabla\left(u_k-u_\infty-\sum_{i=1}^{Q}\hat{u}_k^i\right)\to 0 \text{ dans } \mathrm{L}^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\Sigma).$$

## I.3 - Estimées ponctuelles dans les cous

L'objectif de cette section est la démonstration du théorème suivant :

**Théorème I.5.** *Il existe $\varepsilon_0, C>0$ tel que, pour tout $\lambda\in]0;1/4[$, si $u$ est solution de (I.3) sur $\mathrm{B}_1$ avec*

$$\int_{\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda}|\nabla u|^2<\varepsilon_0$$

*alors pour tout $x\in\mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda}$,*

$$|x|^2|\nabla u(x)|^2\leqslant C\left(|x|^\beta+\left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^\beta+\ln^{-2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}.$$

*Remarque.* Cette inégalité est un raffinement de celle obtenue directement par application du résultat d'$\varepsilon$-régularité ([LR14], théorème 3.2) :

$$|x|^2|\nabla u(x)|^2\leqslant C\int_{\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda}|\nabla u|^2\mathrm{d}x.$$

Soit alors $u$ vérifiant les hypothèses du théorème : $u$ vérifie notamment $-\Delta u=\Omega\cdot\nabla u$. On note $\tilde\Omega=\Omega\mathbf{1}_{\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda}$ et, en utilisant (I.4), on peut appliquer le théorème I.1, quitte à réduire $\varepsilon_0$. On note également $\tilde u$ le prolongement de $u$ obtenu grâce au lemme I.2.

On fait la décomposition de Hodge de $A\nabla u$ sur $\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda$ : en considérant $\varphi,\psi\in\mathrm{W}_0^{1,2}(\mathrm{B}_1)$ solution de

$$\Delta\varphi=\nabla^\perp B\cdot\nabla\tilde{u},\Delta\psi=\nabla^\perp A\cdot\nabla\tilde{u}, \tag{I.15}$$

d'après (I.14), il existe $h$ harmonique tel que, sur $\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda$,

$$A\nabla u=\nabla\varphi+\nabla^\perp\psi+\nabla h. \tag{I.16}$$

Finalement, on écrit $h(x)=h_0\ln|x|+\tilde{h}(x)$ avec $\tilde{h}$ harmonique vérifiant $\displaystyle\int_{\partial\mathrm{B}_r}\partial_\nu\tilde{h}=0$ pour un $r\in]\lambda;1[$ quelconque. La quantification $\mathrm{L}^{2,1}$ permet de contrôler $h_0$.

**Proposition I.6.**

$$|h_0|\leqslant C\ln^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)} \tag{I.17}$$

*Démonstration.* D'après l'inégalité de Wente (voir [Hél02] théorème 3.4.1), au vu des équations (I.15), on a

$$\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1)}\leqslant C\|\nabla B\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1}\|\nabla\tilde{u}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1}\leqslant C\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)} \tag{I.18}$$

et de même

$$\|\nabla\psi\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1)}\leqslant C\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}. \tag{I.19}$$

D'après le lemme 2.3 de [MR23],

$$\|\nabla\tilde{h}\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda})}\leqslant C\|\nabla\tilde{h}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}. \tag{I.20}$$

Notons que puisque $\tilde{h}$ et $h-\tilde{h}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\mathrm{L}^2$, on déduit du théorème de Pythagore, de l'inégalité triangulaire et des équations (I.16),(I.18) et (I.19) :

$$\begin{aligned}\|\nabla\tilde{h}\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}&\leqslant\|\nabla h\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}\\&\leqslant C\left(\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}+\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}+\|\nabla\psi\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}\right)\\&\leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}\end{aligned} \tag{I.21}$$

On a ainsi, en combinant (I.16), (I.18), (I.19), (I.20) et (I.21) :

$$\begin{aligned}|h_0|\|\nabla\ln|x|\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda})}&\leqslant C\Big(\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}+\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1)}+\|\nabla\psi\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1)}\\&\qquad+\|\nabla\tilde{h}\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda})}\Big)\\&\leqslant C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}.\end{aligned}$$

Pour conclure, on vérifie que $\||x|^{-1}\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda})}$ est proportionnel à $\ln(1/\lambda)$.

□

On décompose le reste de la partie harmonique en $\tilde{h}=h_++h_-$ avec $h_+$ harmonique sur $\mathrm{B}_1$ et $h_-$ de la forme

$$h_-(z)=\mathrm{Re}\left(\sum_{n<0}h_nz^n\right).$$

Dans le cou, $h_-$ vérifie les estimées ponctuelles suivantes :

**Lemme I.7.** *Il existe une constante universelle $C>0$ telle que, si $\lambda < 1/\sqrt{2}$, pour tout $z \in \mathrm{B}_{1/2} \backslash \mathrm{B}_\lambda$,*

$$|\nabla h_-(z)|^2 \leqslant C \frac{\lambda^2}{|z|^4} \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)}.$$

*Démonstration.* On a pour tout $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$,

$$|\nabla h_-(\rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 = \left| \sum_{n<0} n h_n \rho^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \right|^2 \tag{I.22}$$

et en utilisant la formule de Parseval, on obtient

$$\|\nabla h\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)} = 2\pi \int_\lambda^1 \sum_{n<0} n^2 |h_n|^2 \rho^{2(n-1)} \rho \mathrm{d}\rho = \pi \sum_{n<0} |n||h_n|^2 \left(\lambda^{2n} - 1\right) \geqslant \pi \sum_{n<0} |n||h_n|^2 \lambda^{2n}/2. \tag{I.23}$$

De plus, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (I.22), on obtient pour $z \in \mathrm{B}_{1/2} \backslash \mathrm{B}_\lambda$,

$$\begin{aligned}
|\nabla h_-(z)|^2 &\leqslant \left( \sum_{n<0} |n||h_n||z|^{n-1} \right)^2 \\
&\leqslant \sum_{n<0} |n||h_n|^2 \lambda^{2n} \times \sum_{n<0} |n| \left( \frac{|z|^{n-1}}{\lambda^n} \right)^2 \\
&\leqslant \frac{2}{\pi} \|\nabla h\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)} \times \sum_{n>0} n \left( \lambda^n |z|^{-n-1} \right)^2 \\
&\leqslant \frac{2\lambda^2}{\pi |z|^4} \|\nabla h\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)} \times \sum_{n>0} n \left( \frac{\lambda^2}{|z|^2} \right)^{n-1} \\
&\leqslant \frac{2\lambda^2}{\pi |z|^4} \|\nabla h\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)} \frac{1}{(1 - (\lambda/|z|)^2)^2} \\
&\leqslant C \frac{\lambda^2}{|z|^4} \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)}.
\end{aligned}$$

□

Les autres termes de (I.16) sont estimés à l'aide d'une version à poids de l'inégalité de Wente :

**Lemme I.8.** *Soient $a, b \in \mathrm{W}^{1,2}(\mathrm{B}_1)$, $\phi$ solution de $-\Delta\phi = \partial_x a \partial_y b - \partial_y a \partial_x b$. Pour tout $\alpha \in ]0,2[$, il existe $C_\alpha > 0$ (ne dépendant que de $\alpha$) tel que*

$$\int_{\mathrm{B}_{1/2} \backslash \mathrm{B}_{1/4}} |\nabla \phi|^2 \leqslant \frac{2}{3} \int_{\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_{1/2}} |\nabla \phi|^2 + C_\alpha \int_{\mathrm{B}_1} |\nabla a|^2 \int_{\mathrm{B}_1} |x|^\alpha |\nabla b|^2.$$

*Démonstration.* Voir [DGR22], lemme F.1. □

*Remarque.* On n'a pas de lemme de Wente sur les anneaux similaire à celui que l'on a sur $\mathrm{B}_1$, le poids permet d'avoir une estimée qui s'en approche.

**Proposition I.9.** *Il existe $\varepsilon_0, C, \beta > 0$, tels que, pour tout $\lambda \in ]0; 1/4[$, si $u$ est solution de (I.3) sur $\mathrm{B}_1$ avec*

$$\int_{\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda} |\nabla u|^2 < \varepsilon_0$$

*alors pour tout $\rho \in ]\lambda; 1/2[$*

$$\int_{\mathrm{B}_{2\rho} \backslash \mathrm{B}_\rho} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant C \left( \rho^\beta + \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^\beta + \ln^{-2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)}.$$

*Démonstration.* On note $\varepsilon = \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)}$. On écrit $A_j = \mathrm{B}_{2^{-j}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-(j+1)}}$.

On fixe $\beta, \alpha$ (à choisir plus tard) avec $0 < \beta < \alpha$ et on pose $\mu = 2^{-\beta}$, $\gamma = 2^{-\alpha}$ (remarquons que s'il existe une constante universelle $C > 0$ telle que $2^{-j}/C \leqslant |x| \leqslant C2^{-j}$, alors il existe $C > 0$ ne dépendant que de $\alpha$ et $\beta$ telle que $\gamma^j/C \leqslant |x|^\alpha \leqslant C\gamma^j$ et $\mu^j/C \leqslant |x|^\beta \leqslant C\mu^j$).

Avec les notations précédentes, on peut appliquer le lemme I.8 à $\varphi$, $\psi$ et $h_+$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\int_{A_{j+1}} |\nabla \ln|x||^2 \mathrm{d}x = \int_{A_{j+1}} |x|^{-2} \mathrm{d}x &= 2\pi \int_{2^{-j-1}}^{2^{-j}} \rho^{-1} \mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi \ln 2 \\
&= \int_{A_j} |\nabla \ln|x||^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3} \int_{A_j} |\nabla \ln|x||^2 \mathrm{d}x + C.
\end{aligned}$$

On a alors pour tout $j \geqslant 0$, en notant

$$v^2 = |\nabla\varphi|^2 + |\nabla^\perp\psi|^2 + |\nabla(h_0 \ln|x|)|^2 + |\nabla h_+|^2,$$

$$\begin{aligned}
\int_{A_{j+1}} v^2 &\leqslant \frac{2}{3}\int_{A_j} v^2 + C\varepsilon \int_{\mathrm{B}_{2^{-j}}} (2^j|x|)^\alpha |\nabla\tilde{u}|^2 + C|h_0|^2 \\
&\leqslant \frac{2}{3}\int_{A_j} v^2 + C\varepsilon\gamma^{-j} \int_{\mathrm{B}_{2^{-j}}} |x|^\alpha |\nabla\tilde{u}|^2 + C|h_0|^2.
\end{aligned}$$

En multipliant par $\mu^j$, on a

$$\int_{A_{j+1}} |x|^\beta v^2 \leqslant \frac{2}{3}\int_{A_j} |x|^\beta v^2 + C\varepsilon \int_{\mathrm{B}_{2^{-j}}} (\mu/\gamma)^j |x|^\alpha |\nabla\tilde{u}|^2 + \mu^j C|h_0|^2,$$

puis, pour $k \in \mathbf{N}$ fixé, on somme pour $j$ allant de $k$ à $+\infty$ :

$$\int_{\mathrm{B}_{2^{-k-1}}} |x|^\beta v^2 \leqslant \frac{2}{3}\int_{\mathrm{B}_{2^{-k}}} |x|^\beta v^2 + C\varepsilon \sum_{j=k}^{+\infty} \left(\int_{\mathrm{B}_{2^{-j}}} (\mu/\gamma)^j |x|^\alpha |\nabla\tilde{u}|^2\right) + C\mu^k |h_0|^2$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{+\infty}\left(\int_{\mathrm{B}_{2^{-j}}}(\mu/\gamma)^j|x|^\alpha|\nabla\tilde{u}|^2\right) &= \sum_{j=k}^{+\infty}(\mu/\gamma)^j\sum_{i=j}^{+\infty}\int_{A_i}|x|^\alpha|\nabla\tilde{u}|^2\\
&= \sum_{i=k}^{+\infty}\int_{A_i}\left(\sum_{j=k}^{i}(\mu/\gamma)^j|x|^\alpha\right)|\nabla\tilde{u}|^2\\
&\leqslant \sum_{i=k}^{+\infty}\int_{A_i}\left(\sum_{j=k}^{i}(\mu/\gamma)^j 2^{-\alpha i}\right)|\nabla\tilde{u}|^2\\
&\leqslant \sum_{i=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=k}^{i}(\mu/\gamma)^j\gamma^i\right)\int_{A_i}|\nabla\tilde{u}|^2,
\end{aligned}$$

et puisque $\sum_{j=k}^{i}(\mu/\gamma)^j\gamma^i \leqslant C\mu^i$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{+\infty}\left(\int_{\mathrm{B}_{2^{-j}}}(\mu/\gamma)^j|x|^\alpha|\nabla\tilde{u}|^2\right) &\leqslant C\sum_{i=k}^{+\infty}\int_{A_i}\mu^i|\nabla\tilde{u}|^2\\
&\leqslant C\int_{\mathrm{B}_{2^{-k}}}|x|^\beta|\nabla\tilde{u}|^2
\end{aligned}$$

De plus, comme $|\nabla\tilde{u}|^2 \leqslant C\left(v^2+|\nabla h_-|^2\right)$ sur $\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda$ et $\operatorname{supp}\nabla\tilde{u}\subset\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_{\lambda/2}$,

$$\int_{\mathrm{B}_{2^{-k}}}|x|^\beta|\nabla\tilde{u}|^2 \leqslant C\left(\int_{\mathrm{B}_{2^{-k}}}|x|^\beta v^2+\int_{\mathrm{B}_{2^{-k}}\backslash\mathrm{B}_\lambda}|x|^\beta|\nabla h_-|^2+\int_{\mathrm{B}_\lambda}|x|^\beta|\nabla\tilde{u}|^2\right).$$

On a

$$\int_{\mathrm{B}_\lambda}|x|^\beta|\nabla\tilde{u}|^2 \leqslant C\varepsilon\lambda^\beta$$

et d'après le lemme I.7, pour $k\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{B}_{2^{-k}}\backslash\mathrm{B}_\lambda}|x|^\beta|\nabla h_-|^2 &\leqslant C\varepsilon\lambda^2\int_{\mathrm{B}_{2^{-k}}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda}}|x|^{\beta-4}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\varepsilon\lambda^2\int_{2\lambda}^{2^{-k}}\rho^{\beta-3}\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

On choisit dans un premier temps $\beta<2$ de sorte que

$$\int_{2\lambda}^{2^{-k}}\rho^{\beta-3}\mathrm{d}\rho \leqslant \int_{2\lambda}^{1}\rho^{\beta-3}\mathrm{d}\rho \leqslant \frac{1}{2-\beta}\left(\lambda^{\beta-2}-1\right) \leqslant C\lambda^{\beta-2}.$$

Ainsi

$$\int_{\mathrm{B}_{2^{-k-1}}}|x|^\beta v^2 \leqslant \left(\frac{2}{3}+C\varepsilon\right)\int_{\mathrm{B}_{2^{-k}}}|x|^\beta v^2+C\left(\mu^k|h_0|^2+\varepsilon\lambda^\beta\right).$$

On choisit alors $\alpha$ tel que $\gamma = 2^{-\alpha} > \frac{2}{3}$, de sorte que si $\varepsilon_0$ est choisi assez petit, pour $k \geqslant 1$ :

$$\int_{\mathrm{B}_{2^{-k-1}}} |x|^\beta v^2 \leqslant \gamma \int_{\mathrm{B}_{2^{-k}}} |x|^\beta v^2 + C\left(\mu^k |h_0|^2 + \varepsilon\lambda^\beta\right).$$

Si on note $F(\rho) = \int_{\mathrm{B}_\rho} |x|^\beta v^2$, alors pour tout $\rho \in [0; 1/2]$

$$F(\rho/2) \leqslant \gamma F(\rho) + C\left(\rho^\beta |h_0|^2 + \varepsilon\lambda^\beta\right).$$

On en déduit d'après le lemme A.1 que pour tout $\rho \in [0; 1/2]$

$$\begin{aligned} F(\rho) &\leqslant \rho^\alpha \sup_{[1/8;1/2]} F + C\left(\rho^\beta |h_0|^2 + \varepsilon\lambda^\beta\right) \\ &\leqslant C\left(\varepsilon\rho^\alpha + \rho^\beta |h_0|^2 + \varepsilon\lambda^\beta\right). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition I.6, on obtient finalement

$$F(\rho) \leqslant C \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)} \rho^\beta \left(\rho^{\alpha-\beta} + \ln^{-2}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^\beta\right).$$

On applique à nouveau le lemme I.7 pour obtenir que pour tout $\rho \in [\lambda; 1/4]$,

$$\int_{\mathrm{B}_{2\rho} \backslash \mathrm{B}_\rho} |\nabla h_-|^2 \mathrm{d}x \leqslant C\varepsilon \frac{\lambda^2}{\rho^2} \leqslant C\varepsilon \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^\beta.$$

On conclut alors que pour tout $\rho \in [\lambda; 1/4]$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{B}_{2\rho} \backslash \mathrm{B}_\rho} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x &\leqslant C\left(\rho^{-\beta} F(2\rho) + \int_{\mathrm{B}_{2\rho} \backslash \mathrm{B}_\rho} |\nabla h_-|^2 \mathrm{d}x\right) \\ &\leqslant C\left(\rho^{\alpha-\beta} + \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^\beta + \ln^{-2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)}. \end{aligned}$$

On note que l'inégalité reste vraie, quitte à augmenter $C$, quand $\rho \in [1/4; 1]$. En imposant finalement $\alpha = 2\beta$ (ie $\gamma = \mu^2$), on obtient l'inégalité annoncée (remarquons que la condition $2^{-\alpha} > 2/3$ implique alors automatiquement $\beta < \log_2(3/2)/2 < 2$). □

*Démonstration du théorème I.5.* On utilise simplement le résultat d'$\varepsilon$-régularité ([LR14], théorème 3.2) avec les estimées d'énergie dans les anneaux de la proposition précédente : pour tout $x \in \mathrm{B}_{1/2} \backslash \mathrm{B}_\lambda$, on a $\mathrm{B}_{\rho/2}(x) \subset \mathrm{B}_{2\rho} \backslash \mathrm{B}_\rho \subset \mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda$ avec $\rho = 2|x|/3$ donc

$$|x|^2 |\nabla u(x)|^2 \leqslant C\left(\frac{\rho}{2} \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{\rho/4}(x))}\right)^2 \leqslant C \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{\rho/2}(x))} \leqslant C \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2\rho} \backslash \mathrm{B}_\rho)}$$

donc d'après ce qui précède, si $x \in \mathrm{B}_{1/2} \backslash \mathrm{B}_\lambda$,

$$|x|^2 |\nabla u(x)|^2 \leqslant C\left(|x|^\beta + \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^\beta + \frac{1}{\ln^2(1/\lambda)}\right) \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_1 \backslash \mathrm{B}_\lambda)}.$$

□

## I.4 - Semi-continuité de l'indice

Dans cette partie nous allons procéder à l'étude de la stabilité de l'indice de Morse pour les points critiques de (I.1). Il s'agit donc d'une analyse de la dérivée seconde de cette fonctionnelle. Pour simplifier les notations et les calculs, ce qui suit sera particularisé au cas des applications harmoniques ($\alpha = 0$) à valeurs dans $\mathcal{N} = \mathbf{S}^n$.

Rappelons les notations : on considère une suite $(u_k)$ d'applications harmoniques $\Sigma \to \mathbf{S}^n$. On suppose qu'elle "bubble-tree"-converge vers $(u_\infty, \hat{u}_\infty)$, avec $\hat{u}_\infty$ une bulle en $p \in \Sigma$ : $u_k \to u_\infty$ dans $\mathcal{C}^1_{\mathrm{loc}}(\Sigma \backslash \{p\}, \mathbf{S}^n)$ et $\hat{u}_k := \varphi_k^* u_k \to \hat{u}_\infty$ dans $\mathcal{C}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{S}^n)$, où $\varphi_k(y) = x_k + \delta_k y$ (en coordonnées normales au voisinage de $p$).

Notons $P_z$ la projection orthogonale sur $T_z\mathbf{S}^n$ et $P_{u_k}$ sa composition avec $u_k$. On pose $W_{u_k} = \{w \in \mathrm{W}^{1,2}_0(\Sigma, \mathbf{R}^{n+1}), P_{u_k} w = w\}$. On a alors pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $w \in W_{u_k}$,

$$Q_{u_k}(w) := \mathrm{D}^2 F_{u_k}(w, w) = \int_\Sigma |\mathrm{d}w|_h^2 - |\mathrm{d}u_k|_h^2 |w|^2 \mathrm{vol}_h. \tag{I.24}$$

On définit l'indice de Morse de $F$ en $u_k$ par :

$$\mathrm{ind}_F(u_k) = \sup\{\dim G \mid Q_{u_k|G} < 0\}.$$

Un résultat classique (voir [MR19], théorème 6.1) est la semi-continuité inférieure de l'indice : pour $k$ assez grand, on a

$$\mathrm{ind}_F(u_k) \geqslant \mathrm{ind}_F(u_\infty) + \mathrm{ind}_F(\hat{u}_\infty).$$

La semi-continuité supérieure est plus subtile et fait intervenir la *nullité*, c'est-à-dire la dimension du noyau de $Q_{u_k}$, notée $\mathrm{null}_F(u_k)$.

**Théorème I.10.** *Pour $k$ assez grand,*

$$\mathrm{ind}_F(u_k) + \mathrm{null}_F(u_k) \leqslant \mathrm{ind}_F(u_\infty) + \mathrm{null}_F(u_\infty) + \mathrm{ind}_F(\hat{u}_\infty) + \mathrm{null}_F(\hat{u}_\infty).$$

Le point clé de la démonstration est la représentation des formes quadratiques $Q_{u_k}$ sous la forme $w \mapsto (w, \mathcal{L}w)$ où $\mathcal{L}$ est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert, contenant $W_{u_k}$, muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Ce dernier détermine uniquement $\mathcal{L}$, dont on peut analyser les propriétés spectrales. En particulier, on peut en déduire l'indice et la nullité de $Q_{u_k}$ (indépendants de $\mathcal{L}$). L'enjeu est donc le choix d'un produit scalaire adapté à l'analyse de ce problème, guidé par les estimées du théorème I.5.

On définit pour $k \in \mathbf{N}$ et $\eta > 0$,

$$\omega_{\eta,k} = \begin{cases} \eta^{-2}(1 + (\eta^2/\delta_k)^{-\beta} + \log^{-2}(\eta^2/\delta_k)) & \text{si } |x| \geqslant \eta, \\ |x|^{-2}((|x|/\eta)^\beta + (\eta|x|/\delta_k)^{-\beta} + \log^{-2}(\eta^2/\delta_k)) & \text{si } \delta_k/\eta \leqslant |x| \leqslant \eta, \\ (\delta_k/\eta)^{-2}((\delta_k/\eta^2)^\beta + \eta^{-4}(1+\eta^2)^2(1 + (|x|/\delta_k)^2)^{-2} + \log^{-2}(\eta^2/\delta_k)) & \text{si } |x| \leqslant \delta_k/\eta. \end{cases}$$

En conséquence du théorème I.5 et de la quantification $\mathrm{L}^{2,1}$ (théorème I.10), on a les estimées suivantes :

**Théorème I.11** (Estimées ponctuelles dans les cous)**.** *Il existe $\eta_0 > 0$ tel que*

$$\sup_{0<\eta<\eta_0} \sup_{k\in\mathbf{N}} \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_\eta(x_k)\setminus \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))} < +\infty \tag{I.25}$$

*et*

$$\lim_{\eta\to 0} \limsup_{k\to+\infty} \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_\eta(x_k)\setminus \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))} = 0. \tag{I.26}$$

On introduit alors naturellement sur $W_{u_k}$ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega_{\eta,k}}$ donné par

$$\|f\|^2_{\omega_{\eta,k}} = \int_\Sigma |f|^2 \omega_{\eta,k} \mathrm{vol}_h$$

et on définit ainsi un opérateur $\mathcal{L}_{\eta,k}$ par

$$Q_{u_k}(w) = \langle w, \mathcal{L}_{\eta,k} w \rangle_{\omega_{\eta,k}}$$

dont une expression explicite est

$$\mathcal{L}_{\eta,k} w = -\omega_{\eta,k}^{-1} \left( P_{u_k} \Delta_h w + |\mathrm{d}u_k|_h^2 w \right).$$

En utilisant le fait que $P_{u_k} w = w$, on obtient $\Delta_h w = P_{u_k}\Delta_h w + 2\mathrm{d}P_{u_k} \cdot_h \mathrm{d}w + \Delta_h P_{u_k} w$, d'où

$$\mathcal{L}_{\eta,k} w = \omega_{\eta,k}^{-1} \left( -\Delta_h w + 2\mathrm{d}P_{u_k} \cdot_h \mathrm{d}w + (\Delta_h P_{u_k} - |\mathrm{d}u_k|_h^2) w \right).$$

Les estimées du théorème I.11 donnent d'abord une borne inférieure globale de la forme quadratique $Q_{u_k}$ :

**Proposition I.12.** *Soit $\eta_0$. On note pour $\eta \in ]0;\eta_0[$,*

$$\mu_{\eta,k} = \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)}$$

*et*

$$\mu_0 = \sup_{0<\eta<\eta_0} \sup_{k\in\mathbf{N}} \mu_{\eta,k}.$$

*Alors pour $\eta_0$ suffisamment petit, $\mu_0$ est fini,*

$$\lim_{\eta\to 0} \limsup_{k\to+\infty} \mu_{\eta,k} = 0$$

*et*

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_{\eta,k}) \subset [-\mu_{\eta,k}; +\infty[.$$

*En particulier, pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $x \in \Sigma$,*

$$|\mathrm{d}u_k(x)|_h^2 \leqslant \mu_0 \omega_{\eta,k}(x), \tag{I.27}$$

*et*

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_{\eta,k}) \subset [-\mu_0; +\infty[. \tag{I.28}$$

*Démonstration.* Voir annexe A.3. □

On a également une minoration de la forme quadratique $Q_{u_k}$ dans les cous :

**Proposition I.13.** *Il existe $\eta_0, c_0 > 0$ tel que, si $\eta \in ]0;\eta_0[$, alors pour $k$ assez grand, si $w \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))$,*

$$Q_{u_k}(w) \geqslant c_0 \|w\|^2_{\omega_{\eta,k}}.$$

*Démonstration.* Cela découle des estimées ponctuelles de $\nabla u_k$ (théorème I.11 et plus particulièrement (I.26)) et d'inégalités de type Hardy/Poincaré dans les cous (lemmes A.5 et A.6) : il existe $C > 0$ tel que pour tout $w \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))$,

$$\int_{\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)} |w|^2 \omega_{\eta,k} \mathrm{vol}_h \leqslant C \int_{\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)} |\mathrm{d}w|_h^2 \mathrm{vol}_h.$$

Alors, pour $\eta \in ]0;\eta_0[$,

$$Q_{u_k}(w) \geqslant \left( \frac{1}{C} - \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))} \right) \int_{\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)} |w|^2 \omega_{\eta,k} \mathrm{vol}_h.$$

Or on a d'après (I.26) :

$$\lim_{\eta\to 0} \limsup_{k\to+\infty} \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))} = 0,$$

donc quitte à réduire $\eta_0$, on peut supposer que pour tout $\eta < \eta_0$,

$$\limsup_{k\to+\infty} \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))} < \frac{1}{2C}$$

de sorte que pour $k$ assez grand,

$$Q_{u_k}(w) \geqslant \frac{1}{2C} \int_{\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)} |w|^2 \omega_{\eta,k} \mathrm{vol}_h.$$

□

Introduisons à présent les objets correspondant à $\omega_{\eta,k}$ et $\mathcal{L}_{\eta,k}$ pour la limite principale $u_\infty$ et la bulle $\hat{u}_\infty$ : on note pour $x \in \Sigma\backslash\{p\}$,

$$\omega_{\eta,\infty}(x) = \lim_{k\to+\infty} \omega_{k,\eta}(x) = \begin{cases} \eta^{-2} & \text{si } |x| \geqslant \eta \\ |x|^{-2}(|x|/\eta)^\beta & \text{si } 0 < |x| \leqslant \eta \end{cases}$$

et pour $y \in \mathbf{C}$, si $\varphi_k(y) = x_k + \delta_k y$,

$$\hat{\omega}_{\eta,\infty}(y) = \lim_{k\to+\infty} \varphi_k^*(\omega_{k,\eta})(y) = \begin{cases} |y|^{-2}(\eta|y|)^{-\beta} & \text{si } |y| \geqslant 1/\eta \\ \eta^{-2}(1+\eta^2)^2(1+|y|^2)^{-2} & \text{si } |y| \leqslant 1/\eta \end{cases}$$

(limite du poids $\omega_{\eta,k}$ à l'extérieur et à l'intérieur de la bulle).

*Remarque.* Ce qui précède permet de mettre en évidence l'intérêt de l'utilisation du poids $\omega_{\eta,k}$ :

— d'une part, si on se contente d'utiliser l'$\varepsilon$-régularité, on ne peut que chercher à démontrer une minoration de la forme

$$Q_{u_k}(w) \geqslant c_0 \int_{\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)} \frac{|w|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x$$

pour $w \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))$, ce qui est impossible d'après le lemme A.5,

— d'autre part, le poids ainsi que ses limites quand on le regarde depuis l'intérieur ou l'extérieur de la bulle vérifient les hypothèses du lemme A.9.

On définit de plus deux opérateurs $\mathcal{L}_{\eta,\infty}$ et $\hat{\mathcal{L}}_{\eta,\infty}$ par

$$\omega_{\eta,\infty}\mathcal{L}_{\eta,\infty}w = P_{u_\infty}\Delta_h w - |\mathrm{d}u_\infty|_h^2 w,$$
$$\hat{\omega}_{\eta,\infty}\hat{\mathcal{L}}_{\eta,\infty}w = P_{\hat{u}_\infty}\Delta_{\mathbf{C}} w - |\mathrm{d}\hat{u}_\infty|^2 w,$$

de sorte que

$$Q_{u_\infty}(w) = \langle w, \mathcal{L}_{\eta,\infty}w\rangle_{\omega_{\eta,\infty}}$$

et

$$Q_{\hat{u}_\infty}(w) = \langle w, \hat{\mathcal{L}}_{\eta,\infty}w\rangle_{\hat{\omega}_{\eta,\infty}}$$

Les opérateurs $\mathcal{L}_{\eta,k}$ et $\mathcal{L}_{\eta,\infty}$ vérifient les hypothèses des lemmes A.8, A.9, et le lemme A.4 permet de s'y ramener pour $\hat{\mathcal{L}}_{\eta,\infty}$. On peut donc diagonaliser ces opérateurs. Ceci garantit, comme annoncé, que l'étude de l'indice de $u_k$ se ramène à l'étude du spectre de $\mathcal{L}_{\eta,k}$ et, plus précisément, que la démonstration du théorème I.10 revient à celle de la proposition suivante :

**Proposition I.14.** *Il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $\eta \in ]0;\eta_0[$, pour tout $k$ assez grand :*

$$\dim \bigoplus_{\lambda\leqslant 0} \ker(\mathcal{L}_{\eta,k}-\lambda) \leqslant \dim \bigoplus_{\lambda\leqslant 0} \ker(\mathcal{L}_{\eta,\infty}-\lambda) + \dim \bigoplus_{\lambda\leqslant 0} \ker(\hat{\mathcal{L}}_{\eta,\infty}-\lambda).$$

On note respectivement $W_{\eta,k}$, $W_{\eta,\infty}$ et $\hat{W}_{\eta,\infty}$ les trois espaces vectoriels de l'énoncé de la proposition. Sa démonstration va reposer sur deux résultats préliminaires.

**Lemme I.15.** *Soit $\eta$ assez petit et soit $(w_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $w_k \in W_{\eta,k}$ et $\|w_k\|_{\omega_{\eta,k}} = 1$. Alors, à extraction près, $w_k \rightharpoonup w_\infty$ dans $W^{1,2}(\Sigma,\mathbf{S}^n) \cap W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Sigma\backslash\{p\},\mathbf{S}^n)$ et $\hat{w}_k := \varphi_k^* w_k \rightharpoonup \hat{w}_\infty$ dans $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C},\mathbf{S}^n)$.*

*Démonstration.* Soit $w_k \in W_{\eta,k}$ tel que $\|w_k\|_{\omega_{\eta,k}} = 1$. On a $Q_{u_k}(w_k) = \langle w_k, \mathcal{L}_{\eta,k}w_k\rangle \leqslant 0$ donc d'après la proposition I.12.(I.27)

$$\int_\Sigma |\mathrm{d}w_k|_h^2 \mathrm{vol}_h \leqslant \int_\Sigma |\mathrm{d}u_k|^2|w_k|^2\mathrm{vol}_h \leqslant \mu_0 \int_\Sigma |w_k|^2\omega_{\eta,k}\mathrm{vol}_h = \mu_0$$

et d'après la proposition I.12.(I.28), puisque $\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_{\eta,k}) \cap \mathbf{R}_- \subset [-\mu_0, 0]$,

$$\|\mathcal{L}_{\eta,k} w_k\|^2_{\omega_{\eta,k}} = \langle w_k, \mathcal{L}^2_{\eta,k} w_k\rangle_{\omega_{\eta,k}} \leqslant \mu_0^2 \|w_k\|^2_{\omega_{\eta,k}} = \mu_0^2$$

Ainsi $\mathcal{L}_{\eta,k} w_k \sqrt{\omega_{\eta,k}}$ est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Sigma)$. On en déduit que

$$\Delta_h w_k + 2\mathrm{d}P_{u_k} \cdot_h \mathrm{d}w_k - \Delta_h P_{u_k} w_k = \sqrt{\omega_{\eta,k}} f_k$$

avec $(f_k)$ uniformément bornée dans $\mathrm{L}^2$. Comme $\omega_{k,\eta} \leqslant C_\eta$ sur $\Sigma \backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)$ donc par un résultat de régularité elliptique $(w_k)$ est bornée dans $\mathrm{W}^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Sigma\backslash\{p\}, \mathbf{S}^n)$.

De même,

$$\Delta_{\mathbf{C}} \hat{w}_k + 2\mathrm{d}P_{\hat{u}_k} \cdot \mathrm{d}\hat{w}_k - \Delta_{\mathbf{C}} P_{\hat{u}_k} \hat{w}_k - |\mathrm{d}\hat{u}_k|^2 \hat{w}_k = \sqrt{\varphi_k^* \omega_{\eta,k}} \delta_k^2 \varphi_k^* f_k$$

avec $\|\delta_k \varphi_k^* f_k\|_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_{\eta/\delta_k}\right)} = \|f_k\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_\eta(x_k))}$ uniformément bornée et $\delta_k^2 \varphi_k^* \omega_{k,\eta} \leqslant C_\eta$ sur $\mathrm{B}_{\eta/\delta_k}$. On en déduit similairement que $(\hat{w}_k)$ est bornée dans $\mathrm{W}^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{S}^n)$. □

**Lemme I.16.** *Avec les notations du lemme précédent,* $(w_\infty, \hat{w}_\infty) \neq (0,0)$.

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons que $(w_\infty, \hat{w}_\infty) = (0,0)$. On va utiliser la proposition I.13 pour aboutir à une contradiction. Considérons $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, [0;1])$ avec $\chi_{|[0;1]} = 1$ et $\mathrm{supp}\chi \subset [0;2]$. On note

$$\breve{w}_k(x) = \chi\left(2\frac{|x-x_k|}{\eta}\right)\left(1 - \chi\left(\eta\frac{|x-x_k|}{\delta_k}\right)\right) w_k(x).$$

On vérifie que $\mathrm{supp}\, \breve{w}_k \subset \mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)$ i.e. $\breve{w}_k \in \mathrm{W}^{1,2}_0\left(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)\right)$ et que si $x \in \mathrm{B}_{\eta/2}(x_k)\backslash \mathrm{B}_{2\delta_k/\eta}(x_k)$, $\breve{w}_k(x) = w_k(x)$. Ainsi si $k$ est assez grand

$$\begin{aligned}
\|\nabla(w_k - \breve{w}_k)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} &= \|\nabla w_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma\backslash\mathrm{B}_\eta(x_k))} + \|\nabla w_k\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)\right)} \\
&\quad + \|\nabla(w_k - \breve{w}_k)\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash\mathrm{B}_{\eta/2}(x_k)\right)} + \|\nabla(w_k - \breve{w}_k)\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)\backslash\mathrm{B}_{2\delta_k/\eta}(x_k)\right)} \\
&= \|\nabla(w_k - w_\infty)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma\backslash\mathrm{B}_\eta(x_k))} + \|\nabla(\hat{w}_k - \hat{w}_\infty)\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_{1/\eta}\right)} \\
&\quad + \|\nabla(w_k - \breve{w}_k)\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash\mathrm{B}_{\eta/2}(x_k)\right)} + \|\nabla(w_k - \breve{w}_k)\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_{2\delta_k/\eta}(x_k)\backslash\mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)\right)}
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Rellich-Kondrachov, les deux premiers termes tendent vers 0. De plus,

$$\begin{aligned}
\|\nabla(w_k - \breve{w}_k)\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash\mathrm{B}_{\eta/2}(x_k)\right)} &= \int_{\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash\mathrm{B}_{\eta/2}(x_k)} \left|\nabla\left(w_k\left(1 - \chi\left(2\frac{|x-x_k|}{\eta}\right)\right)\right)\right|_h^2 \mathrm{vol}_h \\
&\leqslant C \int_{\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash\mathrm{B}_{\eta/2}(x_k)} \frac{|w_k|^2}{\eta^2}\mathrm{vol}_h + |\nabla w_k|^2 \mathrm{vol}_h \\
&\leqslant C_\eta \|w_k - w_\infty\|_{\mathrm{W}^{1,2}\left(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash\mathrm{B}_{\eta/2}(x_k)\right)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

et de même

$$\|\nabla(w_k - \breve{w}_k)\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_{2\delta_k/\eta}(x_k)\backslash\mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)\right)} \leqslant C_\eta \|\hat{w}_k - \hat{w}_\infty\|^2_{\mathrm{W}^{1,2}\left(\mathrm{B}_{2/\eta}\backslash\mathrm{B}_{1/\eta}(x_k)\right)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi
$$\|\nabla(w_k - \breve{w}_k)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$
Par ailleurs,
$$\begin{aligned}
\|w_k - \breve{w}_k\|^2_{\omega_{\eta,k}} &\leqslant C_\eta\left(\|w_k - w_\infty\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma\setminus\mathrm{B}_\eta(x_k))} + \|\hat{w}_k - \hat{w}_\infty\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_{1/\eta}\right)}\right)\\
&\quad + C_\eta\|w_k - \breve{w}_k\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_\eta(x_k)\setminus\mathrm{B}_{\eta/2}(x_k)\cup\mathrm{B}_{2\delta_k/\eta}(x_k)\setminus\mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k)\right)}\\
&\leqslant C_\eta\left(\|w_k - w_\infty\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \|\hat{w}_k - \hat{w}_\infty\|^2_{\mathrm{L}^2\left(\mathrm{B}_{1/\eta}\right)}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}
|Q_{u_k}(w_k) - Q_{u_k}(\breve{w}_k)| &\leqslant \left|\|\nabla w_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} - \|\nabla \breve{w}_k\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\right| + \mu_0\left\|\sqrt{||w_k|^2 - |\breve{w}_k|^2|}\right\|^2_{\omega_{\eta,k}}\\
&\leqslant \left(\|\nabla w_k\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)} + \|\nabla \breve{w}_k\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\right)\|\nabla(w_k - \breve{w}_k)\|_{\mathrm{L}^2(\Sigma)}\\
&\quad + \mu_0(\|w_k\|_{\omega_{\eta,k}} + \|\breve{w}_k\|_{\omega_{\eta,k}})\|w_k - \breve{w}_k\|_{\omega_{\eta,k}}
\end{aligned}$$
On conclut que $\|\breve{w}_k\|_{\omega_{\eta,k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ et $Q_{u_k}(w_k) - Q_{u_k}(\breve{w}_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Or d'après la proposition I.13, $Q_{u_k}(\breve{w}_k) \geqslant c_0\|\breve{w}_k\|_{\omega_{\eta,k}}$ donc
$$\liminf_{k\to+\infty} Q_{u_k}(w_k) \geqslant c_0 > 0,$$
ce qui est absurde car $w_k \in W_{\eta,k}$. □

*Démonstration de la proposition I.14.* Soit $N \in \mathbf{N}^*$ tel qu'il existe un nombre infini de $k \in \mathbf{N}$ vérifiant $\dim W_{\eta,k} \geqslant N$. Quitte à extraire, on va supposer que c'est le cas pour tout $k$. On considère pour tout $k \in \mathbf{N}$, $(\phi^j_k)_{j\in[\![1;N]\!]}$ une famille de $W_{\eta,k}$, orthonormale pour $\|\cdot\|_{\omega_{\eta,k}}$, formée de vecteurs propres de $\mathcal{L}_{\eta,k}$. On note $\lambda^j_k$, les valeurs propres associées. En utilisant la proposition I.12.(I.28), quitte à extraire, on peut supposer que les $(\lambda^j_k)_{k\in\mathbf{N}}$ convergent pour tout $j$. On note $\lambda^j_\infty$ la limite (nécessairement négative). De plus, d'après le lemme I.16, $\phi^j_k \rightharpoonup \phi^j_\infty$ dans $\mathrm{W}^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Sigma\setminus\{p\})$ et $\varphi^*_k\phi^j_k \rightharpoonup \hat{\phi}^j_\infty$ dans $\mathrm{W}^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$ avec $(\phi^j_\infty, \hat{\phi}^j_\infty) \neq (0,0)$ vérifiant
$$\mathcal{L}_{\eta,\infty}\phi^j_\infty = \lambda^j_\infty\phi^j_\infty, \hat{\mathcal{L}}_{\eta,\infty}\hat{\phi}^j_\infty = \lambda^j_\infty\hat{\phi}^j_\infty.$$
En particulier, $(\phi^j_\infty, \hat{\phi}^j_\infty) \in W_{\eta,\infty} \times \hat{W}_{\eta,\infty}$. Si $N > \dim W_{\eta,\infty} + \dim \hat{W}_{\eta,\infty}$, il existe une relation de liaison
$$\sum_{j=1}^N c_j(\phi^j_\infty, \hat{\phi}^j_\infty) = 0.$$
avec $\displaystyle\sum_{j=1}^N |c_j|^2 = 1$. En notant alors $w_k = \displaystyle\sum_{j=1}^N c_j\phi^j_k$, on a $w_k \in W_{\eta,k}$, $\|w_k\|_{\omega_{\eta,k}} = 1$, $w_k \rightharpoonup 0$ et $\varphi^*_k w_k \rightharpoonup 0$ ce qui contredit le lemme I.16. On en conclut que $N \leqslant \dim W_{\eta,\infty} + \dim \hat{W}_{\eta,\infty}$.

On vient de montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de $k \in \mathbf{N}$ tel que $\dim W_{\eta,k} > \dim W_{\eta,\infty} + \dim \hat{W}_{\eta,\infty}$ et donc que pour $k$ assez grand,
$$\dim W_{\eta,k} \leqslant \dim W_{\eta,\infty} + \dim \hat{W}_{\eta,\infty}.$$
□

*Remarque.* Pour étendre le théorème I.10 au cadre général, une attention particulière doit être portée à deux points : il faut d'une part adapter la démonstration du cas des applications harmoniques à valeurs dans la sphère au cas général des PMC, et d'autre part la réviser s'il y a plus d'une bulle, notamment si plusieurs bulles se concentrent en un même point. Comme l'indique [DGR22], la difficulté est technique plutôt que conceptuelle : cet aspect n'est pas abordé dans ce mémoire.

# II | Connexions de Yang-Mills

Considérons $(\mathcal{M}^4, h)$ une variété riemanienne, $G$ un sous-groupe de Lie de $\mathrm{SO}(n)$ et un $G$-fibré $\pi : E \to \mathcal{M}$ muni d'une connexion $\nabla$ compatible avec la $G$-structure. À partir du produit scalaire naturel de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et de la métrique de $\mathcal{M}$, on peut doter le fibré $\Omega^2(\mathcal{M}) \otimes \mathfrak{g}$ d'une métrique naturelle. Alors, pour une connexion $\nabla$ fixée, on peut calculer sa courbure totale, aussi appelée fonctionnelle de Yang-Mills :

$$\mathrm{YM}(\nabla) = \int_{\mathcal{M}} |F_\nabla|_h^2 \,\mathrm{vol}_h$$

où $F_\nabla$ désigne la courbure de $\nabla$. Cette quantité est invariante par transformation conforme (propriété exclusive de la dimension 4) et par transformation de jauge : si $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, G)$, alors en notant $\nabla^g := g^{-1}\nabla g$, on a $\mathrm{YM}(\nabla^g) = \mathrm{YM}(\nabla)$.

On appelle ses points critiques les connexions de Yang-Mills. L'équation d'Euler-Lagrange associée est

$$\mathrm{d}_\nabla^* F_\nabla = 0. \tag{II.1}$$

Pour leur étude locale, on se ramène au cas d'un fibré trivial $\mathrm{B}_1 \times \mathbf{R}^n$ et d'un métrique proche de la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^4$. La connexion s'écrit alors $\nabla = \mathrm{d} + A$ où $A$ est une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$. On notera $F_A$ la courbure associée, de sorte que

$$F_A = \mathrm{d}A + A \wedge A. \tag{II.2}$$

L'équation (II.1) est une équation aux dérivées partielles non-linéaire sur $A$ qui n'est pas elliptique en général, mais qui le devient sous la condition $\mathrm{d}^* A = 0$. Une trivialisation dans laquelle cette équation est vérifiée est appelée *jauge de Coulomb*. L'analyse de l'EDP, notamment la démonstration des propriétés de régularité, est alors sensiblement plus simple que celle des PMC. À cette différence près, leurs solutions sont sujettes aux mêmes phénomènes de concentration-compacité, dûs à l'invariance conforme. La difficulté majeure de l'étude des connexions de Yang-Mills est donc l'existence d'une telle jauge, ce qui fait l'objet des travaux de Uhlenbeck [Uhl82].

Motivée par leur rôle crucial dans l'étude des solutions dans les zones cous en dimension 2, cette partie s'intéresse aux propriétés de quantification dans les espaces de Lorentz, cette fois pour la courbure des connexions de Yang-Mills en dimension 4. Les principaux résultats qui seront utiles à cette analyse sont rappelés dans la section suivante.

## II.1 - Rappel des grands théorèmes

**Théorème II.1** (Théorème d'extraction de jauge de Uhlenbeck ([Uhl82] théorème I.3, [Riv15] théorème IV.1)). *Soit $G$ un groupe de Lie compact. Il existe $\varepsilon_G > 0$ et $C_G > 0$ tels que pour tout $A \in \mathrm{W}^{1,2}\left(\wedge^1 \mathrm{B}_1, \mathfrak{g}\right)$ vérifiant*

$$\int_{\mathrm{B}_1} |F_A|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon_G,$$

*il existe $g \in \mathrm{W}^{2,2}\left(\mathrm{B}_1, G\right)$ tel que*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathrm{B}_1} |A^g|^2 + |\nabla A^g|^2 \,\mathrm{d}x \leq C_G \int_{\mathrm{B}_1} |F_A|^2 \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}^* A^g = 0 \qquad \text{in } \mathrm{B}_1 \\ \iota^*_{\partial \mathrm{B}_1}\left(\star A^g\right) = 0 \end{cases}$$

*où $A^g = g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}Ag$ et $\iota_{\partial \mathrm{B}_1}$ est l'inclusion canonique du bord de la boule unité dans $\mathbf{R}^4$.*

**Théorème II.2** (Équation de Yang-Mills ([Riv15] proposition VI.1)). *Soit $A \in \mathrm{L}^2\left(\wedge^1 \mathrm{B}_1, \mathfrak{g}\right)$ tel que $F_A \in \mathrm{L}^2\left(\wedge^2 \mathrm{B}_1, \mathfrak{g}\right)$. La 1-forme de connection $A$ est de Yang-Mills si et seulement si*

$$\mathrm{d}^*_A F_A = 0 \tag{II.3}$$

*soit encore*

$$\mathrm{d}^* F_A + [A, \llcorner F_A] = 0.$$

*Remarque.* On dispose également de l'équation de Bianchi :

$$\mathrm{d}_A F_A = 0. \tag{II.4}$$

**Théorème II.3** ($\varepsilon$-régularité ([Riv15] théorème VII.1)). *Soit $G$ un groupe de Lie compact. Il existe $\varepsilon_{0,G} > 0$ et pour tout $\ell \in \mathbf{N}$ il existe une constante $C_{G,\ell} > 0$ tels que pour toute 1-forme $A$ dans $\mathrm{W}^{1,2}\left(\wedge^1 \mathrm{B}_1, \mathfrak{g}\right)$ solution de l'équation de Yang-Mills et vérifiant la condition de faible énergie :*

$$\int_{\mathrm{B}_1} |F_A|^2 \,\mathrm{d}x < \varepsilon_{0,G},$$

*il existe une jauge $g$ dans laquelle, pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, l'estimée suivante est vérifiée :*

$$\left\| \nabla^\ell A^g \right\|^2_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{1/2})} \leq C_{G,\ell} \int_{\mathrm{B}_1} |F_A|^2 \,\mathrm{d}x.$$

## II.2 - Contrôles $\mathrm{L}^{2,\infty}$ et $\mathrm{L}^{2,1}$ de la courbure

On fixe $G$ un groupe de Lie compact.

Le premier résultat de cette partie est une égalité impliquant la quantification $\mathrm{L}^{2,\infty}$.

**Lemme II.4.** *Il existe $C>0$ tel que, pour toute connexion de Yang-Mills $A \in \mathrm{W}^{1,2}\left(\wedge^1 \mathrm{B}_1, \mathfrak{g}\right)$, pour tout $\lambda \in ]0,1/4[$, si $A$ vérifie*

$$\sup_{\lambda \leqslant r \leqslant 1/2} \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2r}\backslash \mathrm{B}_r)} \leqslant \varepsilon_{0,G},$$

*alors*

$$\|F_A\|_{\mathrm{L}^{2,\infty}(\mathrm{B}_{1/2}\backslash \mathrm{B}_{2\lambda})} \leqslant C \sup_{\lambda \leqslant r \leqslant 1/2} \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2r}\backslash \mathrm{B}_r)}.$$

*Démonstration.* Notons $\varepsilon = \sup_{\lambda \leqslant r \leqslant 1/2} \|F_A\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2r}\backslash \mathrm{B}_r)}$. On applique le résultat d'$\varepsilon$-régularité (théorème II.3) sur les boules de la forme $\mathrm{B}(x, |x|/6)$ pour $x \in \mathrm{B}_{1/2}\backslash \mathrm{B}_{2\lambda}$ : il existe $c>0$ tel que pour tout $x \in \mathrm{B}_{1/2}\backslash \mathrm{B}_{2\lambda}$,

$$|x|^2 |F_A(x)| \leqslant c \|F_A\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}(x,|x|/3))} \leqslant c \|F_A\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{4|x|/3}\backslash \mathrm{B}_{2|x|/3})} \leqslant c\varepsilon.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|F_A\|^2_{\mathrm{L}^{2,\infty}(\mathrm{B}_{1/2}\backslash \mathrm{B}_{2\lambda})} &= \sup_{t>0} t^2 \left|\left\{x \in \mathrm{B}_{1/2}\backslash \mathrm{B}_{2\lambda}, |F_A(x)| > t\right\}\right| \\
&\leqslant \sup_{t>0} t^2 \left|\left\{x \in \mathrm{B}_{1/2}\backslash \mathrm{B}_{2\lambda}, t|x|^2 \leqslant c\varepsilon\right\}\right| \\
&\leqslant \sup_{t>0} t^2 \left|\mathrm{B}_{\sqrt{c\varepsilon/t}}\right| \\
&\leqslant C \sup_{t>0} t^2 \left(\sqrt{c\varepsilon/t}\right)^4 \\
&\leqslant C\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Afin d'aborder la question de la quantification $\mathrm{L}^{2,1}$, nous allons adapter le théorème de Uhlenbeck (II.1) pour une hypothèse de faible énergie dans les anneaux dyadiques de la zone cou :

**Lemme II.5** (Recollement de jauges, [Riv02] lemme III.1)**.** *Il existe $\varepsilon_0, C>0$ tel que, pour toute connexion de Yang-Mills $A \in \mathrm{W}^{1,2}\left(\wedge^1 \mathrm{B}_1, \mathfrak{g}\right)$, pour tout $\lambda \in ]0,1/4[$, si $A$ vérifie*

$$\sup_{\lambda \leqslant r \leqslant 1/16} \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{16r}\backslash \mathrm{B}_r)} \leqslant \varepsilon_0,$$

*alors*

$$\exists g \in \mathrm{W}^{2,2}(\mathrm{B}_{1/2}\backslash \mathrm{B}_{2\lambda}, G), \int_{\mathrm{B}_{1/2}\backslash \mathrm{B}_{2\lambda}} \frac{|A^g|^2}{|x|^2} + |\nabla A^g|^2 \mathrm{d}x \leqslant C \int_{\mathrm{B}_1\backslash \mathrm{B}_\lambda} |F_A|^2 \mathrm{d}x.$$

*Démonstration.* Notons $\varepsilon = \sup_{\lambda \leqslant r \leqslant 1/16} \|F_A\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{16r} \backslash \mathrm{B}_r)}$. On prend déjà $\varepsilon$ plus petit que $\varepsilon_{0,G}$ (celui du théorème d'Uhlenbeck II.1).

On note $N \in \mathbf{N}$ de sorte que $2^{-N-2} \geqslant \lambda \geqslant 2^{-N-3}$.

Sur chaque $\mathrm{B}_{2^{-k+2}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k-2}}$, $k \in [\![2; N]\!]$, on a, d'après le théorème de Uhlenbeck [Uhl82 ; Riv15], une jauge $\sigma_k$ telle que, sur $\mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k-1}}$,$A_k = A^{\sigma_k}$ vérifie des estimée de la forme

$$|\nabla^\ell A_k| \leqslant C_\ell \frac{\varepsilon_k}{|x|^{\ell+1}} \, (\ell \in \mathbf{N})$$

et

$$\int_{\mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k-1}}} \frac{|A_k|^2}{|x|^2} + |\nabla A_k|^2 \mathrm{d}x \leqslant C\varepsilon_k$$

où $\varepsilon_k = \|F_A\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{2^{-k+2}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k-2}})} \leqslant \varepsilon$.

On note $g_{k,k-1} = \sigma_k^{-1}\sigma_{k-1}$ les fonctions de transition sur $(\mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k-1}}) \cap (\mathrm{B}_{2^{-k+2}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k}}) = \mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k}}$. Puisque

$$A_{k-1} = g_{k,k-1}^{-1} A_k g_{k,k-1} + g_{k,k-1}^{-1} \mathrm{d} g_{k,k-1},$$

on a

$$\mathrm{d} g_{k,k-1} = g_{k,k-1} A_{k-1} - A_k g_{k,k-1}$$

donc

$$|\nabla g_{k,k-1}| \leqslant C \frac{\varepsilon_k}{|x|}, |\nabla^2 g_{k,k-1}| \leqslant C \frac{\varepsilon_k}{|x|^2}.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $\overline{g}_{k,k-1} \in G$ tel que

$$\|g_{k,k-1} - \overline{g}_{k,k-1}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k}})} \leqslant C\varepsilon_k.$$

Notons $(h_k)$ définie par récurrence par $h_0 = \mathrm{id}$, $h_k = \overline{g}_{k,k-1} h_{k-1}$.

Puisque $G$ est compact, $A^{\sigma_k h_k} = h_k^{-1} A_k h_k$ et les transitions $(\sigma_k h_k)^{-1} \sigma_{k-1} h_{k-1} = h_k^{-1} g_{k,k-1} h_{k-1}$ vérifie les mêmes estimées que $A_k$ et $g_{k,k-1}$. De plus

$$h_k^{-1} g_{k,k-1} h_{k-1} - \mathrm{id} = h_k^{-1}(g_{k,k-1} - \overline{g}_{k,k-1}) h_{k-1}.$$

Ainsi, quitte à remplaçer $\sigma_k$ par $\sigma_k h_k$, on peut supposer $\overline{g}_{k,k-1} = \mathrm{id}$ i.e.

$$\|g_{k,k-1} - \mathrm{id}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k}})} \leqslant C\varepsilon_k.$$

L'idée est d'exprimer $g_{k,k-1}$ comme fonction de transition entre des jauges $(\rho_k)$ sur lesquelles on a une forme de contrôle : on veut $g_{k,k-1} = \rho_k^{-1}\rho_{k-1}$, éventuellement sur un sous-anneau de $\mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k}}$.

On fixe $\delta > 0$ tel que $\exp^{-1} : \mathrm{B}_\delta(\mathrm{id}) \to \mathfrak{g}$ soit définie. Quitte à réduire $\varepsilon$, on peut supposer que $g_{k,k-1} \in \mathrm{B}_\delta(\mathrm{id})$.

On va construire les jauges par récurrence de sorte que $\rho_k \in \mathrm{W}^{2,2}\left(\mathrm{B}_{2^{-k+1}}\right)$, $\rho_k = \mathrm{id}$ sur $\mathrm{B}_{2^{-k}}$ :

On prend d'abord $\rho_2 = \mathrm{id}$.

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathrm{B}_2, [0;1]\right)$ ; $\phi_{|\mathrm{B}_1} = 0$, $\phi_{|\mathrm{B}_2 \backslash \mathrm{B}_{\sqrt{2}}} = 1$. On note $\phi_k(x) = \phi(2^k x)$. On a en particulier $\nabla\phi_k$ est à support dans $\mathrm{B}_{2^{-k+1/2}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k}}$ et $\sup\limits_{k\in\mathbf{N}} \| |x||\nabla\phi_k| + |x|^2|\nabla^2\phi_k| \|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_1)} < +\infty$.

On suppose à présent $\rho_{k-1}$ convenablement construit.

— On voudrait avoir
$$\rho_k = \rho_{k-1} g_{k,k-1}^{-1} = (g_{k,k-1}\rho_{k-1}^{-1})^{-1}.$$
On définit alors sur $\mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k}}$, $Y_k := \exp^{-1}(g_{k,k-1})$ et $\rho_k := \exp(-\phi_k Y_k)$ sur $\mathrm{B}_{2^{-k+1}}$.

— Notons $C_k$ la couronne $\mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k-1/2}}$. On a $\rho_k^{-1}\rho_{k-1} = \rho_k^{-1} = g_{k,k-1}$ sur $C_k \cap C_{k-1} = \mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k+1/2}}$. De plus, $\rho_k = \mathrm{id}$ sur $\mathrm{B}_{2^{-k}}$ et $\operatorname{supp} \nabla\rho_k \subset \mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k}}$.

— Par ailleurs, sur $\mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k}}$, on a les estimées suivantes :
$$|\nabla\rho_k| \leqslant C|\nabla(\phi_k Y_k)| \leqslant |Y_k||\nabla\phi_k| + |\nabla Y_k| \leqslant C\frac{|g_{k,k-1} - \mathrm{id}|}{|x|} + |\nabla g_{k,k-1}| \leqslant C\frac{\varepsilon_k}{|x|}$$
et (en utilisant que $|\nabla^2(u \circ v)| \leqslant C|(\nabla^2 u) \circ v||\nabla v|^2 + |(\nabla u) \circ v||\nabla^2 v|$),
$$\begin{aligned}
|\nabla^2\rho_k| &\leqslant C|\nabla^2(\phi_k Y_k)| + |\nabla(\phi_k Y_k)|^2 \\
&\leqslant C|\nabla^2\phi_k||Y_k| + |\nabla\phi_k||\nabla Y_k| + |\nabla^2 Y_k||\phi_k| + |\nabla(\phi_k Y_k)|^2 \\
&\leqslant C|\nabla^2\phi_k||Y_k| + |\nabla\phi_k||\nabla Y_k| + \left(|\nabla g_{k,k-1}|^2 + |\nabla^2 g_{k,k-1}|\right)|\phi_k| + |\nabla(\phi_k Y_k)|^2 \\
&\leqslant C\frac{\varepsilon_k}{|x|^2}.
\end{aligned}$$
On en déduit en particulier que $\rho_k \in \mathrm{W}^{2,2}\left(\mathrm{B}_{2^{-k+1}}\right)$ et que
$$\int_{C_k} |\nabla^2\rho_k|^2 + \frac{|\nabla\rho_k|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x \leqslant C\varepsilon_k^2 \int_{C_k} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^4} \leqslant C\varepsilon_k.$$

On considère alors $g$ définie sur $\bigcup\limits_{k=2}^{N} C_k \supset \mathrm{B}_{1/2} \backslash \mathrm{B}_{2\lambda}$ par
$$g_{|C_k} = \sigma_k \rho_k^{-1}$$
Remarquons que, par construction, sur $C_k \cap C_{k-1} = \mathrm{B}_{2^{-k+1}} \backslash \mathrm{B}_{2^{-k+1/2}}$, $(\sigma_k\rho_k^{-1})^{-1}(\sigma_{k-1}\rho_{k-1}^{-1}) = \rho_k g_{k,k-1}\rho_{k-1}^{-1} = \mathrm{id}$ i.e. $g$ est bien définie sur $C_k \cap C_{k-1}$.

Alors en rassemblant les résultats :

— en recollant ainsi les jauges, on obtient bien une jauge globale sur $\mathrm{B}_{1/2} \backslash \mathrm{B}_{2\lambda}$ : puisque $|x||\nabla\rho_k| + |x|^2|\nabla^2\rho_k| \leqslant C\varepsilon_k$, $\nabla\rho_k$ et $\nabla^2\rho_k$ sont bornées sur $C_k$. On en déduit grâce aux inégalités
$$|\nabla(\sigma_k\rho_k^{-1})| \leqslant C|\nabla\sigma_k| + |\nabla(\rho_k^{-1})| \leqslant C|\nabla\sigma_k| + |\nabla\rho_k|$$

$$\begin{aligned}|\nabla^2(\sigma_k\rho_k^{-1})| &\leqslant C|\nabla^2\sigma_k| + |\nabla^2(\rho_k^{-1})| + |\nabla\sigma_k||\nabla(\rho_k^{-1})| \\ &\leqslant C|\nabla^2\sigma_k| + |\nabla\sigma_k||\nabla\rho_k| + |\nabla\rho_k|^2 + |\nabla^2\rho_k|\end{aligned}$$

que $g_{|C_k} \in \mathrm{W}^{2,2}(C_k, G)$. Ainsi $g \in \mathrm{W}^{2,2}(\mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda}, G)$,

— $A^g_{|C_k} = \rho_k A_k \rho_k^{-1} + \rho_k \mathrm{d}(\rho_k^{-1}) = \rho_k A_k \rho_k^{-1} - \mathrm{d}\rho_k \rho_k^{-1}$ et $C_k \subset \mathrm{B}_{2^{-k+1}}\backslash\mathrm{B}_{2^{-k-1}}$ donc

$$\begin{aligned}\int_{C_k} |\nabla A^g|^2 + \frac{|A^g|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x &\leqslant C\int_{C_k} \frac{|A_k|^2 + |\nabla\rho_k|^2}{|x|^2} + |\nabla A_k|^2 + |\nabla^2\rho_k|^2 + |\nabla\rho_k|^2(|\nabla\rho_k|^2 + |\nabla A_k|^2)\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\int_{C_k} \frac{|A_k|^2 + |\nabla\rho_k|^2}{|x|^2} + |\nabla A_k|^2 + |\nabla^2\rho_k|^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\varepsilon_k,\end{aligned}$$

— comme $\bigcup_{k=2}^{N} C_k \supset \mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda}$, $\bigcup_{k=2}^{N} \mathrm{B}_{2^{-k+2}}\backslash\mathrm{B}_{2^{-k-2}} \subset \mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda$ et qu'un anneau $\mathrm{B}_{2^{-k+2}}\backslash\mathrm{B}_{2^{-k-2}}$ en intersecte au plus trois autres,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda}} |\nabla A^g|^2 + \frac{|A^g|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x &\leqslant \sum_{k=2}^{N}\int_{C_k} |\nabla A^g|^2 + \frac{|A^g|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\sum_{k=2}^{N}\varepsilon_k = C\sum_{k=2}^{N}\int_{\mathrm{B}_{2^{-k+2}}\backslash\mathrm{B}_{2^{-k-2}}} |F_A|^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\int_{\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda} |F_A|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de déduire le point central de cette partie.

**Proposition II.6.** *Il existe $\varepsilon_0, C > 0$ tel que, pour toute connexion de Yang-Mills $A \in \mathrm{W}^{1,2}(\wedge^1\mathrm{B}_1, \mathfrak{g})$, pour tout $\lambda \in ]0, 1/4[$, si $A$ vérifie*

$$\sup_{\lambda\leqslant r\leqslant 1/16} \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_{16r}\backslash\mathrm{B}_r)} \leqslant \varepsilon_0,$$

*alors*

$$\|F_A\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda})} \leqslant C\|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\backslash\mathrm{B}_\lambda)}.$$

*Remarque.* La preuve s'inspire de celle du lemme III.2 de [Riv02], point clé de la quantification $\mathrm{L}^2$.

*Démonstration.* On reprend les notations du lemme II.5. Quitte à changer $A$ en $A^g$, on peut supposer la conclusion du lemme vérifiée.

Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^4, [0;1])$ tel que supp$\chi \subset \mathrm{B}_{1/2}\backslash\mathrm{B}_{2\lambda}$, $\chi \equiv 1$ sur $\mathrm{B}_{1/4}\backslash\mathrm{B}_{4\lambda}$ et $\||x|\nabla\chi\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant C$ indépendant de $\lambda$.

On a $\mathrm{d}(\chi F_A) = -\chi[A, F_A] + \mathrm{d}\chi \wedge F_A$ (identité de Bianchi II.4). On note $\overline{F} = F_A \mathbf{1}_{\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda}$.

On obtient en appliquant l'inégalité de Hölder (version espace de Lorentz, [Hun66] théorème 4.5) et une injection de Lorentz-Sobolev $\dot{\mathrm{W}}^{1,2}(\mathbf{R}^4) \hookrightarrow \mathrm{L}^{4,2}(\mathbf{R}^4)$ (voir [Pee66] théorème 8.1) :

$$\begin{aligned}
\|\chi[A, F_A]\|_{\mathrm{L}^{4/3,1}(\mathbf{R}^4)} &= \|[\chi A, \overline{F}]\|_{\mathrm{L}^{4/3,1}(\mathbf{R}^4)} \\
&\leqslant \|\chi A\|_{\mathrm{L}^{4,2}(\mathbf{R}^4)} \|\overline{F}\|_{\mathrm{L}^{2,2}(\mathbf{R}^4)} \\
&\leqslant C \|\nabla(\chi A)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^4)} \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda)}.
\end{aligned} \tag{II.5}$$

Or

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\chi A)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^4)} &\leqslant C \int_{\mathrm{B}_{1/2} \setminus \mathrm{B}_{2\lambda}} |\chi \nabla A|^2 + |\nabla \chi|^2 |A|^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant C \int_{\mathrm{B}_{1/2} \setminus \mathrm{B}_{2\lambda}} |\nabla A|^2 + \frac{|A|^2}{|x|^2} \mathrm{d}x \\
&\leqslant C \int_{\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda} |F_A|^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{II.6}$$

Par ailleurs, en utilisant l'$\varepsilon$-régularité (théorème II.3), on a sur $\mathrm{B}_{1/2} \setminus \mathrm{B}_{2\lambda}$

$$|x|^2 |F_A(x)| \leqslant C \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda)} \tag{II.7}$$

donc

$$\||x|^3 \mathrm{d}\chi \wedge F_A\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{1/2} \setminus \mathrm{B}_{2\lambda})} \leqslant C \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda)}$$

et

$$\|\mathrm{d}\chi \wedge F_A\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{4\lambda} \setminus \mathrm{B}_{2\lambda})} \leqslant C \frac{\|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda)}}{\lambda^3}.$$

Ainsi

$$\|\mathrm{d}\chi \wedge F_A\|_{\mathrm{L}^{4/3,1}(\mathbf{R}^4)} \leqslant C \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda)} \tag{II.8}$$

On conclut d'après (II.5, II.6, II.8) que

$$\|\mathrm{d}(\chi F_A)\|_{\mathrm{L}^{4/3,1}(\mathbf{R}^4)} \leqslant C \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda)}.$$

Puisque, d'après l'équation de Yang-Mills (II.3), $\mathrm{d}(\star(\chi F_A)) = -\chi[A, \star F_A] + \mathrm{d}\chi \wedge \star F_A$, on a de même,

$$\|\mathrm{d}^*(\chi F_A)\|_{\mathrm{L}^{4/3,1}(\mathbf{R}^4)} \leqslant C \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda)}.$$

On montre alors, en appliquant le lemme de Gaffney (lemme A.10) à $\chi F_A$, que

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\chi F_A)\|_{\mathrm{L}^{4/3,1}(\mathbf{R}^4)} &\leqslant C \left( \|\mathrm{d}(\chi F_A)\|_{\mathrm{L}^{4/3,1}(\mathbf{R}^4)} + \|\mathrm{d}^*(\chi F_A)\|_{\mathrm{L}^{4/3,1}(\mathbf{R}^4)} \right) \\
&\leqslant C \|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{B}_\lambda)}
\end{aligned}$$

Puis par injection de Lorentz-Sobolev $\dot{\mathrm{W}}^{1,(4/3,1)}(\mathbf{R}^4) \hookrightarrow \mathrm{L}^{2,1}(\mathbf{R}^4)$ ([Pee66] théorème 8.1),

$$\|\chi F_A\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathbf{R}^4)} \leqslant C\|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\setminus\mathrm{B}_\lambda)}$$

soit encore

$$\|F_A\|_{\mathrm{L}^{2,1}\left(\mathrm{B}_{1/4}\setminus\mathrm{B}_{4\lambda}\right)} \leqslant C\|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\setminus\mathrm{B}_\lambda)}.$$

On peut également utiliser l'inégalité (II.7) pour montrer que l'on a également

$$\|F_A\|_{\mathrm{L}^{2,1}\left(\mathrm{B}_{1/2}\setminus\mathrm{B}_{1/4}\right)} + \|F_A\|_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathrm{B}_{4\lambda}\setminus\mathrm{B}_{2\lambda})} \leqslant C\|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\setminus\mathrm{B}_\lambda)}.$$

Ainsi

$$\|F_A\|_{\mathrm{L}^{2,1}\left(\mathrm{B}_{1/2}\setminus\mathrm{B}_{2\lambda}\right)} \leqslant C\|F_A\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}_1\setminus\mathrm{B}_\lambda)}.$$

□

Remarquons que les hypothèses des résultats précédents sont naturellement dans une zone cou (autour d'un point de concentration), pour une suite de connexions Yang-Mills, en utilisant l'$\varepsilon$-régularité (voir [Riv15], théorème VII.3, *claim 1*). On en déduit les quantifications $\mathrm{L}^2$ de la courbure, puis par un argument de *bootstrap*, la quantification $\mathrm{L}^{2,1}$, qui peuvent être présentées de la façon suivante :

**Théorème II.7.** *Soit $(\mathcal{M}^4, h)$ une 4-variété riemannienne fermée et $\pi : E \to \mathcal{M}$ un G-fibré. Soit $(\nabla^k)$ une suite de connexions Yang-Mills sur $E$ d'énergie bornée. Il existe une connexion de Yang-Mills limite $\nabla^\infty$ sur un fibré $E^\infty \to \mathcal{M}$, un nombre fini de points $\{p_1, \dots, p_Q\}$ et, pour tout $j \in [\![1, Q]\!]$, un nombre fini de connexions de Yang-Mills $\left(D^i_j\right)_{i\in[\![1,N_j]\!]}$ sur $\mathbf{S}^4$ tels que, à extraction près, la suite $(\nabla^k)$ converge fortement[1] vers $\nabla^\infty$ en dehors de $\{p_1, \dots, p_Q\}$ et tels que*

$$|F_{\nabla^k}|^2_h \operatorname{vol}_h \rightharpoonup |F_{\nabla^\infty}|^2_h \operatorname{vol}_h + \sum_{j=1}^{Q}\left(\sum_{i=1}^{N_j}\|F_{D^i_j}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{S}^4)}\right)\delta_{p_j}.$$

*De plus,*

$$\liminf_{k\to+\infty}\|F_{\nabla^k}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{M})} = \|F_{\nabla^\infty}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathcal{M})} + \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i=1}^{N_j}\|F_{D^i_j}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{S}^4)}$$

*et*

$$\liminf_{k\to+\infty}\|F_{\nabla^k}\|^2_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathcal{M})} = \|F_{\nabla^\infty}\|^2_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathcal{M})} + \sum_{j=1}^{Q}\sum_{i=1}^{N_j}\|F_{D^i_j}\|^2_{\mathrm{L}^{2,1}(\mathbf{S}^4)}.$$

1. C'est-à-dire qu'au voisinage de tout point, il existe une jauge dans laquelle la convergence est $\mathcal{C}^\infty$.

# Annexes

Dans cette partie sont regroupés différents résultats auxiliaires, permettant de démontrer les résultats énoncés dans ce mémoire mais n'ayant pas été jugés nécessaire à la compréhension en première lecture. On trouvera d'abord des propriétés de nature variées, utiles dans l'étude de l'indice de la première partie. La section suivante est un recueil de résultat de théorie spectrale permettant notamment d'obtenir la diagonalisation des opérateurs $\mathcal{L}_{\eta,k}$. Une dernière section est dédiée à l'inégalité de Gaffney, intervenant dans la démonstration de la proposition II.6.

**Lemme A.1.** *Si $F$ vérifie pour tout $\rho \in [0; R]$,*

$$F(\rho/2) \leqslant 2^{-\alpha} F(\rho) + u + v\rho^\beta$$

*avec $\alpha > \beta$ alors pour tout $\rho \in [0; R]$*

$$F(\rho) \leqslant \rho^\alpha \sup_{[R/4;R]} F + C(u + v\rho^\beta)$$

*Démonstration.* Pour tout $\rho \in ]0; R[$,

$$F(\rho/2^{n+1}) \leqslant 2^{-\alpha} F(\rho/2^n) + u + v\rho^\beta 2^{-n\beta}$$

Alors

$$2^{n\alpha} F(\rho/2^n) - F(\rho) = \sum_{k=0}^{n-1} (2^{(k+1)\alpha} F(\rho/2^{k+1}) - 2^{k\alpha} F(\rho/2^k)) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2^{(k+1)\alpha} (u + v\rho^\beta 2^{-n\beta})$$

donc

$$2^{n\alpha} F(\rho/2^n) - F(\rho) \leqslant C(2^{n\alpha} u + v\rho^\beta 2^{n(\alpha-\beta)})$$

On en déduit

$$F(\rho/2^n) \leqslant 2^{-n\alpha} F(\rho) + C(u + v(\rho/2^n)^\beta)$$

Si maintenant $2^{-(n+1)} \leqslant \rho \leqslant 2^{-n}$, et $2^{-N_-} \leqslant R \leqslant 2^{-(N_- - 1)}$, on a

$$R/4 \leqslant 2^{-(N_- + 1)} \leqslant \rho 2^{(n-N_-)} \leqslant 2^{-N_-} \leqslant R$$

d'où

$$F(\rho) = F(\rho 2^{(n-N_-)}/2^{-(n-N_-)}) \leqslant 2^{-n\alpha} F(\rho 2^{(n-N_-)}) + C(u + v\rho^\beta)$$

et donc
$$F(\rho) \leqslant \rho^\alpha \sup_{[R/4;R]} F + C(u + v\rho^\beta).$$

□

**Lemme A.2.** *Si $\eta' > \eta$ et $\delta_k/\eta < \eta$, alors sur $\Sigma \backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta'}(x_k)$, $\omega_{\eta',k} \leqslant \omega_{\eta,k}$.*

*Démonstration.* On distingue plusieurs zones : $(I) = \{|x| \geqslant \eta'\}$, $(II) = \{\eta \leqslant |x| \leqslant \eta'\}$, $(III) = \{\delta_k/\eta \leqslant |x| \leqslant \eta\}$ et $(IV) = \{\delta_k/\eta' \leqslant |x| \leqslant \delta_k/\eta\}$.

Dans $(I)$ et $(III)$ c'est une simple conséquence du fait que l'expression soit une fonction décroissante de $\eta$.

Dans $(II)$, $\omega_{\eta,k}$ est constante, $\omega_{\eta',k}$ est une fonction décroissante de $|x|$ donc
$$\begin{aligned} \omega_{\eta',k}(x) &\leqslant \eta^{-2}\left((\eta/\eta')^\beta + (\eta\eta'/\delta_k)^{-\beta} + \log^{-2}\left(\eta'^2/\delta_k\right)\right) \\ &\leqslant \eta^{-2}(1 + (\eta^2/\delta_k)^{-\beta} + \log^{-2}(\eta^2/\delta_k)) = \omega_{\eta,k}(x). \end{aligned}$$
Dans $(IV)$, $\delta_k/\eta \geqslant |x|$ et $\eta'|x|/\delta_k \leqslant 1$
$$\begin{aligned} \omega_{\eta,k}(x) &\geqslant |x|^{-2}\left((|x|/\eta)^\beta + \tfrac{(1+\eta^2)^2}{(\eta^2+(\eta|x|/\delta_k)^2)^2} + \log^{-2}(\eta^2/\delta_k)\right) \\ &\geqslant |x|^{-2}\left((|x|/\eta')^\beta + 1 + \log^{-2}\left(\eta'^2/\delta_k\right)\right) \\ &\geqslant |x|^{-2}\left((|x|/\eta')^\beta + (\eta'|x|/\delta_k)^{-\beta} + \log^{-2}\left(\eta'^2/\delta_k\right)\right) = \omega_{\eta',k}(x). \end{aligned}$$

□

**Proposition A.3.** *Soit $\eta_0 > 0$ assez petit. On note*
$$\mu_{\eta,k} = \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma)}$$
*et*
$$\mu_0 = \sup_{0<\eta<\eta_0} \sup_{k\in\mathbf{N}} \mu_{\eta,k}.$$
*Alors $\mu_0 < +\infty$, $\lim_{\eta\to 0} \limsup_{k\to+\infty} \mu_{\eta,k} = 0$ et $\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_{\eta,k}) \subset [-\mu_{\eta,k}; +\infty[$.*

*Démonstration.* Si on montre $\mu_0 < +\infty$, on aura immédiatement $\mathrm{Sp}(\mathcal{L}_{\eta,k}) \subset [-\mu_{\eta,k}; +\infty[$. En effet, on aura alors : si $w \in \ker(\mathcal{L}_{\eta,k} - \lambda)$, $\|w\|_{\omega_{\eta,k}} = 1$,
$$\lambda = Q_{u_k}(w) \geqslant -\int_\Sigma |\mathrm{d}u_k|_h^2 |w|^2 \mathrm{vol}_h \geqslant -\mu_{\eta,k}\|w\|^2_{\omega_{\eta,k}} = -\mu_{\eta,k} \geqslant -\mu_0.$$
On décompose $\mu_{\eta,k}$ en
$$\mu_{\eta,k} = \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma\backslash \mathrm{B}_\eta(x_k))} + \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))} + \left\| \frac{|\mathrm{d}u_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_\eta(x_k)\backslash \mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))}.$$

On a

$$\left\|\frac{|du_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma\setminus \mathrm{B}_\eta(x_k))} \leqslant \eta^2 \||du_k|_h^2\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma\setminus\mathrm{B}_\eta(x_k))} \to \eta^2\||du_\infty|_h^2\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma\setminus\mathrm{B}_\eta(p))}$$

et

$$\left\|\frac{|du_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))} \leqslant \delta_k^2\eta^2\||du_k|_h^2\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{\delta_k/\eta}(x_k))} \leqslant C\eta^2\||\nabla v_k|^2\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{1/\eta})} \to \eta^2\||\nabla v_\infty|^2\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{1/\eta})}$$

En appliquant une inversion à $v_\infty$ et en utilisant un résultat de *point removability* ([LR14] théorème 3.2), on en déduit que $|\nabla v_\infty(y)|^2 \leqslant C(1+|y|^2)^{-2}$ et en particulier que $\nabla v_\infty$ est bornée. Ainsi, on obtient $\lim_{\eta\to 0}\limsup_{k\to+\infty}\mu_{\eta,k} = 0$.

On vérifie (voir lemme A.2) que si $\eta' > \eta$ alors sur $\Sigma\setminus\mathrm{B}_{\delta_k/\eta'}(x_k)$, $\omega_{\eta',k} \leqslant \omega_{\eta,k}$ donc

$$\left\|\frac{|du_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty\left(\Sigma\setminus\mathrm{B}_{\delta_k/\eta'}(x_k)\right)} \leqslant \left\|\frac{|du_k|_h^2}{\omega_{\eta',k}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty\left(\Sigma\setminus\mathrm{B}_{\delta_k/\eta'}(x_k)\right)},$$

donc

$$\sup_{0<\eta<\eta_0}\sup_{k\in\mathbf{N}}\left\|\frac{|du_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma\setminus\mathrm{B}_{\delta_k/\eta_0}(x_k))} = \sup_{k\in\mathbf{N}}\left\|\frac{|du_k|_h^2}{\omega_{\eta_0,k}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Sigma\setminus\mathrm{B}_{\delta_k/\eta_0}(x_k))} < +\infty.$$

De plus,

$$\sup_{0<\eta<\eta_0}\sup_{k\in\mathbf{N}}\left\|\frac{|du_k|_h^2}{\omega_{\eta,k}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{\delta_k/\eta_0}(x_k))} \leqslant C\sup_{0<\eta<\eta_0}\eta^2\sup_{k\in\mathbf{N}}\||\nabla v_k|^2\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{B}_{1/\eta_0})} < +\infty.$$

D'où $\mu_0 < +\infty$. □

**Lemme A.4.** *La projection stéréographique $\pi : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{C}$ induit une isométrie $\pi^* : \dot{\mathrm{W}}^{1,2}(\mathbf{S}^2,\mathbf{R}^N) \to \dot{\mathrm{W}}^{1,2}(\mathbf{C},\mathbf{R}^N)$.*

*Démonstration.* Voir [DGR22] proposition IV.1. □

**Lemme A.5.** *Pour tous $R > r > 0$, pour tout $f \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\mathrm{B}_R\setminus\mathrm{B}_r)$,*

$$\int_{\mathrm{B}_R\setminus\mathrm{B}_r}\frac{|f|^2}{|x|^2}\mathrm{d}x \leqslant \pi^{-2}\ln^2(R/r)\int_{\mathrm{B}_R\setminus\mathrm{B}_r}|\nabla f|^2\mathrm{d}x.$$

*Démonstration.* Voir [DGR22] lemme IV.1. □

**Lemme A.6.** *Pour tout $\beta \in ]0;1[$, il existe $C > 0$ tel que pour tous $R > r > 0$, pour tout $f \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\mathrm{B}_R\setminus\mathrm{B}_r)$,*

$$\int_{\mathrm{B}_R\setminus\mathrm{B}_r}\frac{|f|^2}{|x|^2}\left(\left(\frac{r}{|x|}\right)^\beta + \left(\frac{|x|}{R}\right)^\beta\right)\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathrm{B}_R\setminus\mathrm{B}_r}|\nabla f|^2\mathrm{d}x.$$

*Démonstration.* Voir [DGR22] lemme IV.1. □

## A.1 - Résultats de théorie spectrale

**Lemme A.7.** *Soit $(\mathcal{L}, D(\mathcal{L}))$ opérateur auto-adjoint minoré sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. On note $q$ la forme quadratique fermée associée, de domaine $\mathcal{Q}$ et de forme polaire $\varphi$. On suppose que $\mathcal{L}$ est à résolvante compacte : on note $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de vecteurs propres, associés aux valeurs propres $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (rangées dans l'ordre croissant). Alors*

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathfrak{H} ; \sum_{n\in\mathbf{N}} |\lambda_n| |\langle e_n, x\rangle|^2 < +\infty \right\}$$

*et si $x \in \mathcal{Q}$, $q(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n |\langle x, e_n\rangle|^2$.*

*Par ailleurs,*

$$\mathcal{Q} = \bigoplus_{\lambda \leqslant 0} \ker(\mathcal{L} - \lambda) \oplus \overline{\bigoplus_{\lambda > 0} \ker(\mathcal{L} - \lambda)}$$

*où $\mathcal{Q}$ est muni de la norme hilbertienne associée à la forme quadratique $\mathcal{N} : x \mapsto q(x) + (1 - \lambda_0)\|x\|^2$.*

*Démonstration.* Remarquons que puisque $\lambda_n \to +\infty$, $\sum_{n\in\mathbf{N}} |\lambda_n||\langle e_n, x\rangle|^2 < +\infty$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n |\langle e_n, x\rangle|^2$ est convergente.

Par définition de $\mathcal{Q}$ (voir [Lew22], théorème 3.10), $\sqrt{\mathcal{N}}$ est une norme hilbertienne sur $\mathcal{Q}$ et l'injection $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathfrak{H}$ est continue ($\|x\|^2 \leqslant \mathcal{N}(x)$)

Pour tout $x \in \mathfrak{H}$, $x = \sum_{n\in\mathbf{N}} \langle e_n, x\rangle e_n$. Notons $\mathcal{Q}' = \left\{ x \in \mathfrak{H} ; \sum_{n\in\mathbf{N}} |\lambda_n||\langle e_n, x\rangle|^2 < +\infty \right\}$.

Supposons $\sum_{n\in\mathbf{N}} |\lambda_n||\langle e_n, x\rangle|^2 < +\infty$. Alors, en notant $x_N = \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n$, on a $x_N \in \mathcal{Q}$, $x_N \to x$ dans $\mathfrak{H}$

$$q(x_{N+p} - x_N) = \sum_{n=N}^{N+p} \lambda_n \langle e_n, x\rangle^2.$$

donc $(x_N)$ est de Cauchy pour $\sqrt{\mathcal{N}}$. On en déduit que $x \in \mathcal{Q}$ et que $q(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n |\langle e_n, x\rangle|^2$. Ainsi $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$.

Si $x \in \mathcal{Q}'^{\perp_{\mathcal{N}}}$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $x$ est orthogonal à $e_n$ ie

$$(\lambda_n - \lambda_0 + 1)|\langle e_n, x\rangle|^2 = 0$$

donc $\langle e_n, x\rangle = 0$ et on en déduit $x = 0$. Par suite $\mathcal{Q}'$ est dense dans $\mathcal{Q}$ pour la norme $\mathcal{N}$. Reste à montrer que $\mathcal{Q}'$ est fermé. Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{Q}'$ et $x \in \mathcal{Q}$ tel que $\mathcal{N}(x_k - x) \to 0$. On a en particulier

$$\|x_k - x\|^2 \leqslant q(x_k - x) + (1 - \lambda_0)\|x_k - x\|^2 \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

donc $x_k \to x$ dans $\mathfrak{H}$ et $\mathcal{N}(x_k) \to \mathcal{N}(x)$ donc $q(x_k) \to q(x)$. Or pour $N$ assez grand

$$q(x_k) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \lambda_n |\langle e_n, x_k\rangle|^2 \geqslant \sum_{n=0}^{N} \lambda_n |\langle e_n, x_k\rangle|^2$$

donc

$$q(x) = \lim q(x_k) \geqslant \lim \sum_{n=0}^{N} \lambda_n |\langle e_n, x_k\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n |\langle e_n, x\rangle|^2$$

et en faisant tendre $N$ vers $+\infty$, on obtient que $x \in \mathcal{Q}'$. $\square$

**Lemme A.8.** *Avec les notations du lemme précédent, on a*

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda<0} \ker(\mathcal{L}-\lambda)\right) = \mathrm{ind} q,$$

$$\ker\mathcal{L} = \ker q.$$

*De plus,*

$$\mathrm{ind} q + \dim\ker q = \inf\{\mathrm{codim} G \mid q_{|G} > 0\} < +\infty.$$

*En particulier, si $F$ est un sous-espace vectoriel sur lequel $q$ est négative,* $\dim F \leqslant \mathrm{ind} q + \dim\ker q$.

*Remarque.* Soient $F, G$ sont deux sous-espace vectoriel d'un espace vecoriel $E$. On suppose que $F \cap G = \{0\}$. Alors $\dim F \leqslant \mathrm{codim} G$. En effet, la restriction à $F$ de la projection $E \to E/G$ est injective.

*Démonstration.* Déjà, $\ker q = \ker \mathcal{L}$ et sur $\bigoplus_{\lambda<0} \ker(\mathcal{L}-\lambda)$, $q$ est définie négative donc

$$\dim\left(\bigoplus_{\lambda<0} \ker(\mathcal{L}-\lambda)\right) \leqslant \mathrm{ind} q.$$

Par ailleurs, si le spectre de $\mathcal{L}$ est minoré par $m<0$, le spectre négatif de $\mathcal{L}$ est discret et inclus dans $[m, 0]$ donc est fini : on a donc $\dim\left(\bigoplus_{\lambda\leqslant 0} \ker(\mathcal{L}-\lambda)\right) < +\infty$.

Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}$ tel que $q_{|W} < 0$. Alors $W \cap \overline{\bigoplus_{\lambda\geqslant 0} \ker(\mathcal{L}-\lambda)} = \{0\}$ : en effet, si $w \in W \cap \overline{\bigoplus_{\lambda\geqslant 0} \ker(\mathcal{L}-\lambda)}$, on peut l'écrire $w = v + z$ avec $v \perp z$, $v \in \ker q$ et $q(z) \geqslant \lambda_0 \|z\|^2$ donc

$$q(w) = q(z) \geqslant \lambda_0 \|z\|^2$$

donc $z = 0$ et $q(w) = q(z) = 0$ donc $w = 0$. Ainsi

$$\dim W \leqslant \mathrm{codim}\left(\overline{\bigoplus_{\lambda\geqslant 0} \ker(\mathcal{L}-\lambda)}\right) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda<0} \ker(\mathcal{L}-\lambda)\right)$$

d'où la première égalité.

Soit $G$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}$ tel que $q_{|G} > 0$. Alors, $G \cap \bigoplus_{\lambda \leqslant 0} \ker(\mathcal{L} - \lambda) = \{0\}$ donc $\mathrm{codim} G \geqslant \dim \left( \bigoplus_{\lambda \leqslant 0} \ker(\mathcal{L} - \lambda) \right)$. De plus $q$ est définie positive sur $\overline{\bigoplus_{\lambda > 0} \ker(\mathcal{L} - \lambda)}$ qui est de codimension $\dim \left( \bigoplus_{\lambda \leqslant 0} \ker(\mathcal{L} - \lambda) \right)$, d'où la troisième égalité.

Si $F$ est tel que $q_{|F} < 0$, alors pour tout $G$ tel que $q_{|G} > 0$ on a $G \cap F = \{0\}$ donc $\dim F \leqslant \mathrm{codim} G$. On obtient l'inégalité annoncée en utilisant ce qui précède. $\square$

**Lemme A.9.** *Soit $(\mathcal{N}^2, h)$ surface riemannienne, compacte ou égale à $\mathbf{C}$, $\mathcal{M}^n$ sous-variété compacte de $\mathbf{R}^N$. On note pour $z \in \mathcal{M}$, $P_z$ la projection orthogonale $\mathbf{R}^N \to T_z\mathcal{M}$. On considère $u : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ lisse..*

*On considère un poids $\omega : \mathcal{N} \to \mathbf{R}_+$ pour lequel qu'il existe $p > 1$ et $C > 0$ tels que $\omega \in \mathrm{L}^p(\mathcal{N})$ et $\omega \geqslant 1/C$.*

*Notons $V_u = \{w \in \mathrm{L}^2(\mathcal{N}, \mathbf{R}^N), P_u w = w\}$, $V_u^\omega = \mathrm{L}^2_\omega(\mathcal{N}, \mathbf{R}^N) \cap V_u$ et $W_u := \mathrm{W}^{1,2}(\mathcal{N}, \mathbf{R}^N) \cap V_u$. On se donne également un opérateur symétrique et borné $B : W_u \to V_u$.*

*L'opérateur $\omega^{-1}(-P_u\Delta_h + B)$ sur $V_u^\omega$ avec pour domaine $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbf{R}^N) \cap V_u^\omega$ admet une unique extension auto-adjointe dont le domaine est inclus dans $W_u$. De plus, cette extension est à résolvante compacte et spectre minoré.*

*Remarque.* $V_u^\omega$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2_\omega(\mathcal{N}, \mathbf{R}^N)$.

*Remarque.* $\mathrm{W}^{1,2}(\mathcal{N}, \mathbf{R}^N) \subset \mathrm{L}^2_\omega \subset \mathrm{L}^2$ car $1 \leqslant C\omega$ et on a l'inégalité

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2_\omega} = \int_{\mathcal{N}} |f|^2 \omega \mathrm{vol}_h \leqslant \|f\|^2_{\mathrm{L}^{2p'}} \|\omega\|_{\mathrm{L}^p}$$

associée à l'injection $\mathrm{W}^{1,2} \hookrightarrow \mathrm{L}^{2p'}$.

*Démonstration.* En conséquence de corollaire 3.19, corollaire 5.24 et théorème 5.31 de [Lew22], il suffit de montrer que le résultat est vrai avec $B = 0$ puis que $\omega^{-1}B(\omega^{-1}P_u\Delta_h + 1)^{-1}$ est un opérateur compact de $V_u^\omega$.

On note $(A^{\min}, D(A^{\min})) = (\omega^{-1}\Delta_h, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbf{R}^N) \cap V_u^\omega)$ et $Q$ la forme quadratique associée. Si $w \in D(A^{\min})$

$$Q(w) = \langle w, A^{\min} w \rangle_{\mathrm{L}^2_\omega} = -\int_{\mathcal{N}} w \cdot \Delta_h w \mathrm{vol}_h = \int_{\mathcal{N}} |\mathrm{d}w|_h^2 \mathrm{vol}_h$$

donc $Q$ est positive et fermée sur $V_u$. On note $(A, D(A))$ l'extension de Friedrichs de $A^{\min}$. On a

$$D(A) = \left\{ w \in W_u \mid \exists z \in V_u, \forall v \in W_u, \int_{\mathcal{N}} \langle \mathrm{d}w, \mathrm{d}v \rangle_h \mathrm{vol}_h = \int_{\mathcal{N}} z \cdot v \, \omega \mathrm{vol}_h \right\}$$

Soit $w \in D(A)$. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathbf{R}^N)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{N}} z \cdot \varphi\, \omega \mathrm{vol}_h &= \int_{\mathcal{N}} P_u z \cdot \varphi\, \omega \mathrm{vol}_h \\ &= \int_{\mathcal{N}} z \cdot P_u \varphi\, \omega \mathrm{vol}_h \\ &= \int_{\mathcal{N}} \langle \mathrm{d}w, \mathrm{d}(P_u\varphi)\rangle_h \mathrm{vol}_h\end{aligned}$$

ie au sens des distributions $(\Delta_h w, P_u\varphi) = (\omega z, \varphi)$ ie $P_u \Delta_h w = \omega z = \sqrt{\omega}\sqrt{\omega} z$. Puisque $\sqrt{\omega} z \in \mathrm{L}^2$ et $\sqrt{\omega} \in \mathrm{L}^{2p}$, on a $P_u \Delta_h w \in \mathrm{L}^q$ avec $q = \frac{2p}{p+1} \in ]1; 2[$. Puisque

$$\Delta_h w = P_u \Delta_h w + 2\mathrm{d}(P_u) \cdot_h \mathrm{d}w + \Delta_h(P_u) w$$

en appliquant un résultat de régularité elliptique, on obtient que $w \in \mathrm{W}^{2,q}$ et que $z = Aw = \omega^{-1} P_u \Delta_h w$. Finalement,

$$D(A) = \left\{ w \in W_u \mid \Delta_h w \in \mathrm{L}^q, \omega^{-1} P_u \Delta_h w \in \mathrm{L}^2_\omega \right\}.$$

Montrons à présent que $(A+1)^{-1}$ est un opérateur compact $V_u^\omega \to W_u$. Soit $(f_n) \subset V_u^\omega$ telle que $f_n \rightharpoonup 0$. On note $w_n = (A+1)^{-1} f_n \in D(A) \subset W_u$. Alors $w_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathrm{L}^2_\omega$ et comme $Aw_n = f_n - w_n$, on a $Aw_n \rightharpoonup 0$. Alors

$$\int_{\mathcal{N}} |\mathrm{d}w_n|_h^2 \mathrm{vol}_h \leqslant \|Aw_n\|_{\mathrm{L}^2_\omega} \|w_n\|_{\mathrm{L}^2_\omega}$$

donc $(w_n)$ est bornée dans $\mathrm{W}^{1,2}$. On en déduit que $w_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathrm{W}^{1,2}$. Puisque

$$\Delta_h w_n = \omega(f_n - w_n) + 2\mathrm{d}(P_u) \cdot_h \mathrm{d}w_n + \Delta_h(P_u) w_n$$

on a comme précédemment que $(w_n)$ est bornée dans $\mathrm{W}^{2,q}$ donc par compacité de l'injection $\mathrm{W}^{2,q} \hookrightarrow \mathrm{W}^{1,2}$, on obtient le résultat attendu.

On a notamment, puisque $\mathrm{W}^{1,2} \hookrightarrow \mathrm{L}^{2p'}$ est compacte et que $\mathrm{L}^{2p'} \hookrightarrow \mathrm{L}^2_\omega$ est continue, que $A$ est à résolvante compacte.

Pour conclure la démonstration, il suffit de remarque que $\omega^{-1} B : W_u \to V_u^\omega$ est borné : en effet si $f \in \mathrm{L}^2$

$$\|\omega^{-1} f\|^2_{\mathrm{L}^2_\omega} = \int_{\mathcal{N}} \omega^{-1} |f|^2 \mathrm{vol}_h \leqslant C \|f\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

$\square$

## A.2 - Inégalité de Gaffney

**Lemme A.10.** *Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tous $p \in ]1; +\infty[$, $q \in ]0; +\infty]$, il existe une constante $C_{p,q}$ telle que pour toute forme différentielle $\omega$,*

$$\|\nabla\omega\|_{\mathrm{L}^{p,q}(\mathbf{R}^n)} \leqslant C_{p,q}\left(\|\mathrm{d}\omega\|_{\mathrm{L}^{p,q}(\mathbf{R}^n)} + \|\mathrm{d}^*\omega\|_{\mathrm{L}^{p,q}(\mathbf{R}^n)}\right).$$

*Démonstration.* On commence par traiter le cas $q = p$ (voir [Tro10], théorème 9.1).

L'idée de trouver, pour $\mu \in [\![1; n]\!]$, deux opérateurs bornés $A_\mu, B_\mu : \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n, \Lambda^k) \to \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n, \Lambda^k)$ tels que pour $\omega \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbf{R}^n, \Lambda^k)$,

$$\partial_\mu\omega = A_\mu \mathrm{d}\omega + B_\mu \mathrm{d}^*\omega.$$

Soit $\omega \in \mathrm{W}^{1,p}(\mathbf{R}^n, \Lambda^k)$. Alors

$$\|\nabla\omega\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant C\left(\|\mathrm{d}\omega\|_{\mathrm{L}^p} + \|\mathrm{d}^*\omega\|_{\mathrm{L}^p}\right)$$

1. Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, l'opérateur $R_j : \varphi \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{\mathrm{i}\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}\varphi\right)$ défini sur les fonctions est un opérateur borné $\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^p$ (voir [Gra14] corollaire 5.2.8).
2. On définit sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ l'opérateur $K : \varphi \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|}\mathcal{F}\varphi\right)$.
   Les opérateurs $R_j$, $K$ et $\partial_j$ sont des multiplicateurs de Fourier (ie sont de la forme $\varphi \mapsto \mathcal{F}^{-1}(m(\xi)\mathcal{F}\varphi)$ avec $m(\xi)$ égal à $-\mathrm{i}\xi_j/|\xi|$, $1/|\xi|$ et $-\mathrm{i}\xi_j$ respectivement), en particulier, ils commutent. On a notamment $\partial_j \circ K = K \circ \partial_j = R_j$ et $K^2 \circ \Delta = \Delta \circ K^2 = \mathrm{id}$.

3. On définit $e^\mu : \Lambda^k\mathbf{R}^n \to \Lambda^{k+1}\mathbf{R}^n$ par $e^\mu(\alpha) = \mathrm{d}x^\mu \wedge \alpha$. On prolonge naturellement un opérateur $T$ définit sur les fonctions aux formes différentielles en imposant qu'il commute avec $e^\mu$ pour tout $\mu \in [\![1; n]\!]$, ie si $\alpha = \sum_I \alpha_I \mathrm{d}x^I$

   $$T(\alpha) = \sum_I T(\alpha_I)\mathrm{d}x^I.$$

   Avec $T = \partial_\mu$, on a par exemple :

   $$\mathrm{d} = \partial_\mu \circ e^\mu = \mathrm{e}^\mu \circ \partial_\mu.$$

4. On note $i^\mu\alpha := \partial_\mu \lrcorner\, \alpha$. Remarquons que puisque $i^\mu(\star\alpha) = \star(\alpha \wedge \mathrm{d}x^\mu)$, si $\alpha$ est une $s$-forme alors

   $$\star e^\mu(\alpha) = (-1)^s i^\mu(\star\alpha)$$

   Si maintenant $\beta$ est une $k$-forme, $\beta = \star\alpha$ avec $\alpha = (-1)^{k(n-k)} \star \beta$. Ainsi

   $$i^\mu\beta = (-1)^{n-k} \star e^\mu((-1)^{k(n-k)} \star \beta) = (-1)^{nk+n-k(k+1)} \star e^\mu \star \beta = (-1)^{nk+n} \star e^\mu \star \beta$$

On en déduit que si $T$ est un opérateur définit sur les fonctions, étendu aux formes différentielles comme en 3), il commute avec $e^\mu$ et $\star$ donc avec $i^\mu$.
De plus, si $\beta$ est une $k$-forme,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^*\beta &= (-1)^{n(k-1)+1} \star \mathrm{d} \star \beta \\ &= (-1)^{n(k-1)+1} \star (\partial_\mu \circ \mathrm{e}^\mu(\star\beta)) \\ &= (-1)^{n(k-1)+1}\partial_\mu(\star e^\mu \star \beta) \\ &= (-1)^{n(k-1)+1}(-1)^{nk+n}\partial_\mu(i^\mu\beta) \\ &= -\partial_\mu(i^\mu\beta) \end{aligned}$$

ie $-\mathrm{d}^* = \partial_\mu \circ i^\mu = i^\mu \circ \partial_\mu$.

5. On remarque que $\mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d} = -\partial_\mu \circ \partial_\nu \circ (e^\mu \circ i^\nu + i^\nu \circ e^\mu)$ et, puisque

$$i^\nu \circ e^\mu(\alpha) = \partial_\nu \lrcorner (\mathrm{d}x^\mu \wedge \alpha) = (\partial_\nu \lrcorner \mathrm{d}x^\mu) \wedge \alpha - \mathrm{d}x^\mu \wedge (\partial_\nu \lrcorner \alpha) = \delta^{\mu,\nu}\alpha - e^\mu \circ i^\nu(\alpha)$$

on obtient bien $\mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d} = -\delta^{\mu,\nu}\partial_\mu \circ \partial_\nu = -\sum_\mu \partial_\mu^2$.

6. On note enfin $\mathcal{R} = \mathrm{d} \circ K = K \circ \mathrm{d} = R_\mu \circ \mathrm{e}^\mu$ et $\mathcal{R}^* = \mathrm{d}^* \circ K = K \circ \mathrm{d}^* = -R_\mu \circ i^\mu$. On obtient formellement

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \Delta \circ K^2 \circ \partial_\mu \\ &= (K \circ \partial_\mu) \circ (\Delta \circ K) \\ &= R_\mu \circ (\mathrm{d} \circ \mathrm{d}^* + \mathrm{d}^* \circ \mathrm{d}) \circ K \\ &= R_\mu \circ (\mathrm{d} \circ K) \circ \mathrm{d}^* + R_\mu \circ (\mathrm{d}^* \circ K) \circ \mathrm{d} \\ &= R_\mu \circ \mathcal{R} \circ \mathrm{d}^* + R_\mu \circ \mathcal{R}^* \circ \mathrm{d} \\ &= A_\mu \circ \mathrm{d} + B_\mu \circ \mathrm{d}^* \end{aligned}$$

où $A_\mu = R_\mu \circ \mathcal{R}^* = -i^\nu \circ R_\mu \circ R_\nu$, $B_\mu = R_\mu \circ \mathcal{R} = e^\nu \circ R_\mu \circ R_\nu$. Donc a priori pour toute forme différentielle $\omega$ à coefficients dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$,

$$\partial_\mu\omega = A_\mu \mathrm{d}\omega + B_\mu \mathrm{d}^*\omega \tag{9}$$

7. Pour tous $p \in ]1;+\infty[$, pour tous $\mu,\nu \in [\![1;n]\!]$, $R_\mu \circ R_\nu : \varphi \mapsto -\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi_\mu\xi_\nu}{|\xi|^2}\mathcal{F}\varphi\right)$ est borné de $\mathrm{L}^p$ dans lui-même. Il en va donc de même pour $A_\mu$ et $B_\mu$. Ainsi, par densité, si $p \in ]1;+\infty[$, l'égalité (9) est vraie pour toute forme différentielle $\mathrm{W}^{1,p}$. Il existe donc une constante $C_p$ pour toute forme différentielle $\omega$ dans $\mathrm{W}^{1,p}$,

$$\|\nabla\omega\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)} \leqslant C_p \left(\|\mathrm{d}\omega\|_{\mathrm{L}^{p,q}(\mathbf{R}^n)} + \|\mathrm{d}^*\omega\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)}\right).$$

En appliquant le théorème 1.4.19 de [Gra14], on obtient que pour tous $\mu,\nu$, $R_\mu R_\nu$ est borné de $\mathrm{L}^{p,q}$ dans lui-même pour tous $p \in ]1;+\infty[$ et $q \in ]0;+\infty]$. C'est donc également le cas de $A_\mu$ et $B_\mu$. On conclut à l'existence d'une constante $C_{p,q}$ telle que

$$\|\nabla\omega\|_{\mathrm{L}^{p,q}(\mathbf{R}^n)} \leqslant C_{p,q} \left(\|\mathrm{d}\omega\|_{\mathrm{L}^{p,q}(\mathbf{R}^n)} + \|\mathrm{d}^*\omega\|_{\mathrm{L}^{p,q}(\mathbf{R}^n)}\right).$$

□

# Bibliographie


[DGR22] Francesca Da Lio, Matilde Gianocca et Tristan Rivière. « Morse index stability for critical points to conformally invariant lagrangians ». In : *arXiv preprint arXiv :2212.03124* (2022).

[Gra14] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*. Array. Graduate texts in mathematics ; New York : Springer, 2014, p. 638. URL : http://link.springer.com/10.1007/978-1-4939-1194-3.

[Grü84] Michael Grüter. « Conformally invariant variational integrals and the removability of isolated singularities ». eng. In : *Manuscripta mathematica* 47.1-3 (1984), p. 85-104. ISSN : 0025-2611.

[Hél02] Frédéric Hélein. *Harmonic maps, conservation laws, and moving frames / Frédéric Hélein*. eng. 2nd ed. Cambridge tracts in mathematics. Cambridge New York : Cambridge University Press, 2002. ISBN : 0-521-81160-0.

[Hun66] Richard A. Hunt. « ON L(p,q) SPACES ». In : *L'Enseignement Mathématique* 12.4 (1966), p. 249. ISSN : 0013-8584. DOI : 10.5169/seals-40747. URL : https://doi.org/10.5169/seals-40747.

[Lew22] Mathieu Lewin. *Théorie spectrale et mécanique quantique*. T. 87. Mathématiques et Applications. Springer International Publishing, 2022. DOI : 10.1007/978-3-030-93436-1. URL : https://hal.science/hal-03812036.

[LR14] Paul Laurain et Tristan Riviere. « Angular energy quantization for linear elliptic systems with antisymmetric potentials and applications ». In : *Analysis & PDE* 7.1 (2014), p. 1-41.

[LS16] Tobias Lamm et Ben Sharp. « Global estimates and energy identities for elliptic systems with antisymmetric potentials ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 41.4 (2016), p. 579-608.

[MR19] John Moore et Robert Ream. « Minimal two-spheres of low index in manifolds of positive complex sectional curvature ». In : *Mathematische Zeitschrift* (avr. 2019). DOI : 10.1007/s00209-018-2150-x.

[MR23] Alexis Michelat et Tristan Rivière. « Pointwise Expansion of Degenerating Immersions of Finite Total Curvature ». In : *The Journal of Geometric Analysis* 33 (jan. 2023), p. 24. DOI : 10.1007/s12220-022-01058-z.

[Pee66] Jaak PEETRE. « Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff ». fr. In : *Annales de l'Institut Fourier* 16.1 (1966), p. 279-317. DOI : 10.5802/aif.232. URL : https://aif.centre-mersenne.org/articles/10.5802/aif.232/.

[Riv02] Tristan RIVIERE. « Interpolation spaces and energy quantization for Yang–Mills fields ». In : *Communications in Analysis and Geometry* 10.4 (2002), p. 683-708.

[Riv07] Tristan RIVIERE. « Conservation laws for conformally invariant variational problems ». eng. In : *Inventiones mathematicae* 168.1 (2007), p. 1-22. ISSN : 0020-9910.

[Riv15] Tristan RIVIÈRE. *The Variations of Yang-Mills Lagrangian*. 2015. arXiv : 1506.04554 [math.AP].

[Tro10] Marc TROYANOV. *On the Hodge decomposition in* $\mathbf{R}^n$. 2010. arXiv : 0710.5414 [math.FA].

[Uhl82] Karen K UHLENBECK. « Connections with $L^p$ bounds on curvature ». In : *Communications in mathematical physics* 83.no. 1 (1982), p. 31-42. ISSN : 1432-0916.